1. **Exercice 4 :**

   • Décomposition en éléments simples : $F = \dfrac{X-1}{X^3(X+1)}$

   Méthode 1 :

   La partie polaire relative au pôle simple -1 est $\frac{2}{X+1}$ (application des résultats de cours sur la partie polaire relative à un pôle simple).

$$F - \frac{2}{X+1} = \frac{-2X^3+X-1}{X^3(X+1)} = \frac{-2X^2+2X-1}{X^3} \qquad \textit{car } -2X^3+X-1 = (X+1)(-2X^2+2X-1)$$

   Et on a $\dfrac{-2X^2+2X-1}{X^3} = -\dfrac{2}{X} + \dfrac{2}{X^2} - \dfrac{1}{X^3}$

   Ainsi, $F = \dfrac{2}{X+1} - \dfrac{2}{X} + \dfrac{2}{X^2} - \dfrac{1}{X^3}$

   Méthode 2 :

   $\deg(F) < 0$, donc la partie entière de F est nulle.

   La décomposition de F en éléments simples s'écrit :

$$F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X^2} + \frac{d}{X^3} \qquad (*)$$

   On multiplie $(*)$ par $X+1$ et on évalue en -1 : $a = 2$.

   On multiplie $(*)$ par X^3 et on évalue en 0 : $d = -1$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = a+b$, d'où $b = -2$.

   On évalue $(*)$ en 1 : $0 = \dfrac{a}{2} + b + c + d$, d'où $c = 2$.

   Ainsi, $F = \dfrac{2}{X+1} - \dfrac{2}{X} + \dfrac{2}{X^2} - \dfrac{1}{X^3}$

   • Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$F = \frac{X^5}{(X^4-1)^2}$$

   La partie entière de F est nulle car $\deg(F) < 0$.
   $(X^4-1)^2 = (X-1)^2(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2$: F admet 4 pôles doubles.
   La décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$F = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{b_1}{X+1} + \frac{b_2}{(X+1)^2} + \frac{c_1}{X-i} + \frac{c_2}{(X-i)^2} + \frac{d_1}{X+i} + \frac{d_2}{(X+i)^2} \qquad (*)$$

   où $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2) \in \mathbb{C}^8$.

$$F(X) = -F(-X) = \frac{a_1}{X+1} - \frac{a_2}{(X+1)^2} + \frac{b_1}{X-1} - \frac{b_2}{(X-1)^2} + \frac{c_1}{X+i} - \frac{c_2}{(X+i)^2} + \frac{d_1}{X-i} - \frac{d_2}{(X-i)^2}$$

   L'unicité de la décomposition en éléments simples permet de déduire :

$$a_1 = b_1,\ a_2 = -b_2,\ c_1 = d_1 \text{ et } c_2 = -d_2$$

   On multiplie $(*)$ par $(X-1)^2$ et on évalue en 1 : $a_2 = \frac{1}{16}$

   On multiplie $(*)$ par $(X-i)^2$ et on évalue en i : $c_2 = -\frac{i}{16}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 2a_1 + 2c_1$, d'où $c_1 = -a_1$.

   Pour déterminer a_1, on utilise la fraction rationnelle $G = F - \dfrac{a_2}{(X-1)^2}$ dont la partie polaire relative à 1 est $\dfrac{a_1}{X-1}$:

$$G = F - \frac{1}{16(X-1)^2} = \frac{16X^5 - (X+1)^2(X^2+1)^2}{16(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2} = \frac{-X^6+14X^5-3X^4-4X^3-3X^2-2X-1}{16(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2}$$

On effectue la division euclidienne de $-X^6+14X^5-3X^4-4X^3-3X^2-2X-1$ par $X-1$ (dont le reste est nul) et on obtient

$$G=\frac{-X^5+13X^4+10X^3+6X^2+3X+1}{16(X-1)(X+1)^2(X^2+1)^2}$$

La partie polaire de G relative au pôle 1 est $\dfrac{1}{8(X-1)}$, donc $a_1=\dfrac{1}{8}$.

Ainsi, $F=\dfrac{1}{8(X-1)}+\dfrac{1}{16(X-1)^2}+\dfrac{1}{8(X+1)}-\dfrac{1}{16(X+1)^2}+\dfrac{1}{8(X-i)}-\dfrac{i}{16(X-i)^2}+\dfrac{1}{8(X+i)}+\dfrac{i}{16(X+i)^2}$

• Détermination d'éléments simples de deuxième espèce : $F=\dfrac{1}{X(X^2+X+1)^2}$

On commence par déterminer la partie polaire relative au pôle simple 0, qui est la fraction $\dfrac{c}{X}$ avec $c=\dfrac{1}{1}=1$.
On étudie alors la fraction rationnelle $G=F-\dfrac{c}{X}$:

$$G=F-\frac{1}{X}=\frac{1-(X^2+X+1)^2}{X(X^2+X+1)^2}=-\frac{X^4+2X^3+3X^2+2X}{X(X^2+X+1)^2}=-\frac{X^3+2X^2+3X+2}{(X^2+X+1)^2}$$

On effectue la division euclidienne de X^3+2X^2+3X+2 par X^2+X+1 :

$$X^3+2X^2+3X+2=(X^2+X+1)(X+1)+X+1$$

En divisant par $(X^2+X+1)^2$, on obtient la décomposition sur $\mathbb{R}$ de G :

$$G=-\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}$$

Ainsi, $F=\dfrac{1}{X}-\dfrac{X+1}{X^2+X+1}-\dfrac{X+1}{(X^2+X+1)^2}$

• Utilisation des développements limités :
$F=\frac{X^2+1}{(X-1)(X+1)^6}$

a) La partie polaire relative au pôle 1 est de la forme $\dfrac{c}{X-1}$. On trouve $c=\dfrac{2}{2^6}=\dfrac{1}{32}$.

b) On pose $x=-1+h$ et on effectue le développement limité de $G(-1+h)$ au voisinage de 0.

$$G(-1+h)=\frac{(-1+h)^2+1}{-2+h}=\frac{2-2h+h^2}{-2+h}=-\frac{1-h+\frac{h^2}{2}}{1-\frac{h}{2}}$$

D'où $G(-1+h)\underset{h\to0}{=}-\left(1-h+\dfrac{h^2}{2}\right)\times\left(1+\dfrac{h}{2}+\dfrac{h^2}{4}+\dfrac{h^3}{8}+\dfrac{h^4}{16}+\dfrac{h^5}{32}+\mathrm{o}(h^5)\right)$

$G(-1+h)\underset{h\to0}{=}-1+\dfrac{h}{2}-\dfrac{h^2}{4}-\dfrac{h^3}{8}-\dfrac{h^4}{16}-\dfrac{h^5}{32}+\mathrm{o}(h^5)$

$G(x)\underset{x\to-1}{=}-1+\dfrac{1}{2}(x+1)-\dfrac{1}{4}(x+1)^2-\dfrac{1}{8}(x+1)^3-\dfrac{1}{16}(x+1)^4-\dfrac{1}{32}(x+1)^5+\mathrm{o}((x+1)^5)$

c) Or on sait que la décomposition en éléments simples de F est du type :

$$F=\frac{1}{32(X-1)}+\sum_{k=1}^{6}\frac{a_k}{(X+1)^k}$$

D'où $G=\dfrac{(X+1)^6}{32(X-1)}+a_1(X+1)^5+a_2(X+1)^4+a_3(X+1)^3+a_4(X+1)^2+a_5(X+1)+a_6$

Comme $\dfrac{(x+1)^6}{32(x-1)}\underset{x\to1}{=}\mathrm{o}((x+1)^5)$, on en déduit que

$$G(x)\underset{x\to1}{=}a_6+a_5(x+1)+a_4(x+1)^2+a_3(x+1)^3+a_2(x+1)^4+a_1(x+1)^5+\mathrm{o}((x+1)^5)$$

Par unicité du développement limité, on obtient :

$$a_1=-\frac{1}{32}\qquad a_2=-\frac{1}{16}\qquad a_3=-\frac{1}{8}\qquad a_4=-\frac{1}{4}\qquad a_5=\frac{1}{2}\qquad a_6=-1$$

La décomposition de F en éléments simples est donc

$$F = \frac{1}{32(X-1)} - \frac{1}{32(X+1)} - \frac{1}{16(X+1)^2} - \frac{1}{8(X+1)^3} - \frac{1}{4(X+1)^4} + \frac{1}{2(X+1)^2} - \frac{1}{(X+1)^6}$$

• <u>Autres résultats de décompositions en éléments simples :</u>

$$\frac{4X^3}{(X^2-1)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}$$

$$\frac{2X+1}{X(X+1)^4} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{(X+1)^3} + \frac{1}{(X+1)^4}$$

$$\frac{X^4+X^2+1}{X^3-X} = X - \frac{1}{X} + \frac{3}{2(X-1)} + \frac{3}{2(X+1)}$$

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{X^2}{(X^2+1)^2} = -\frac{1}{4(X-i)} + \frac{1}{4(X-i)^2} + \frac{1}{4(X+i)} + \frac{1}{4(X+i)^2}$$

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{X^5}{X^3-1} = X^2 + \frac{1}{3(X-1)} + \frac{2X+1}{3(X^2+X+1)}$$

$$\frac{X^6}{X^4+1} = X^2 + \frac{\sqrt{2}X}{4(X^2+\sqrt{2}X+1)} - \frac{\sqrt{2}X}{4(X^2-\sqrt{2}X+1)}$$