CORRECTION D'EXERCICES DU TD 17

1. **Exercice 1 :**

   a) L'espace probabilisé choisi est $\Omega = [[1, 6]]^4$ muni de la probabilité uniforme : $\text{Card}(\Omega) = 6^4$.
   On note A l'événement "on obtient au moins un 6".
   L'événement complémentaire $\overline{A}$ est "on n'obtient aucun 6", et donc correspond à l'ensemble des quadruplets de Ω dont aucune composante n'est égale à 6.
   On a $\text{Card}(\overline{A}) = 5^4$, d'où $P(\overline{A}) = \frac{5^4}{6^4}$.
   On déduit que $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{671}{1296} \simeq 0.52$.

   b) Même chose ici. $\Omega = ([[1, 6]] \times [[1, 6]])^{24}$. $\text{Card}(\Omega) = 36^{24}$.
   B est l'événement : "on obtient au moins une fois le double 5".
   $\overline{B}$ est l'événement : "on n'obtient aucun double 5".
   $\text{Card}(\overline{B}) = 35^{24}$.
   On a donc : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \simeq 0.49$.

2. **Exercice 2 :**
   On numérote les joueurs de 1 à 4.
   On distribue 13 cartes au premier joueur ($\binom{52}{13}$ possibilités), puis 13 cartes au second ($\binom{39}{13}$ possibilités), puis 13 cartes au troisième ($\binom{26}{13}$ possibilités) et enfin on donne les 13 dernières cartes au quatrième.
   On obtient :
   $$\text{Card}(\Omega) = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}$$
   On munit Ω de la probabilité uniforme.

   On note A l'événement "chaque joueur a reçu un as".
   On dénombre les distributions donnant un as à chaque joueur : on donne un as puis 12 autres cartes au joueur 1 (on choisit pour cela un as parmi 4 cartes puis 12 cartes parmi 48 : $\binom{4}{1}\binom{48}{12}$ possibilités), puis on donne un as puis 12 autres cartes au joueur 2 ($\binom{3}{1}\binom{36}{12}$ possibilités), puis on donne un as puis 12 autres cartes au joueur 3 ($\binom{2}{1}\binom{24}{12}$ possibilités) et enfin on donne le dernier as et les douze dernières cartes au joueur 4.
   On obtient :
   $$\text{Card}(A) = 4\binom{48}{12}\times 3\binom{36}{12}\times 2\binom{24}{12} = \frac{24 \times 48!}{(12)!^4} \quad \text{puis} \quad P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{24 \times 13^4}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = \frac{2197}{20825} \simeq 0.105$$

3. **Exercice 3 :**

   On prend comme univers Ω l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble des 32 cartes :
   $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{3}$.
   Comme les cartes sont tirées au hasard, on munit Ω de la probabilité uniforme.

   a) A : "on a trois piques". $\text{Card}(A) = \binom{8}{3}$. $P(A) = \dfrac{7}{620}$.

   b) B : "on a trois as". $\text{Card}(B) = \binom{4}{3}$. $P(B) = \dfrac{1}{1240}$.

   c) C : "on a 2 piques et 1 carreau". $\text{Card}(C) = \binom{8}{2} \times \binom{8}{1}$. $P(C) = \dfrac{7}{155}$.

4. **Exercice 4 :**

   a) Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments d'un ensemble à 12 éléments (il y a 12 boules).
   $\text{Card}(\Omega) = \binom{12}{3} = 220$.
   Comme les boules sont tirées au hasard, on munit Ω de la probabilité uniforme.

   A : "les 3 boules sont de la même couleur"
   C_1 : "les 3 boules sont blanches", C_2 : "les 3 boules sont noires", C_3 : "les 3 boules sont bleues".
   $A = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ et les événements de cette union sont 2 à 2 incompatibles.

$\mathrm{Card}(C_1) = \binom{5}{3} = 10$, $\mathrm{Card}(C_2) = \binom{4}{3} = 4$ et $\mathrm{Card}(C_3) = \binom{3}{3} = 1$.

D'où $P(A) = \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{3}{44}$

B : "les 3 boules sont de couleur différente"

$\mathrm{Card}(B) = \binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 60$, d'où $P(B) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

b) Ω est l'ensemble des 3-listes d'un ensemble à 12 éléments. $\mathrm{Card}(\Omega) = 12^3 = 1728$.

On munit Ω de la probabilité uniforme et on garde les notations du premier cas.

C_1 est l'ensemble des 3-listes d'un ensemble à 5 éléments. $\mathrm{Card}(C_1) = 5^3 = 125$.

De même, $\mathrm{Card}(C_2) = 4^3 = 64$ et $\mathrm{Card}(C_3) = 3^3 = 27$.

D'où $P(A) = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8}$.

On note D_1 : "la première boule est blanche, la seconde est noire, la troisième est bleue".

$\mathrm{Card}(D_1) = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

L'événement B est la réunion disjointe de 6 événements de même type que D_1 (il y a $3! = 6$ ordre possibles pour les 3 couleurs).

D'où $\mathrm{Card}(B) = 6 \times 60 = 360$, et $P(B) = \frac{60}{1728} = \frac{5}{24}$.

c) Ω est l'ensemble des 3-arrangements d'un ensemble à 12 éléments. $\mathrm{Card}(\Omega) = 12 \times 11 \times 10 = 1320$.

On munit Ω de la probabilité uniforme.

C_1 est l'ensemble des 3-arrangements d'un ensemble à 5 éléments. $\mathrm{Card}(C_1) = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

C_2 est l'ensemble des 3-arrangements d'un ensemble à 4 éléments. $\mathrm{Card}(C_2) = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

C_3 est l'ensemble des 3-arrangements d'un ensemble à 3 éléments. $\mathrm{Card}(C_3) = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

D'où $P(A) = \frac{60 + 24 + 6}{1320} = \frac{3}{44}$.

B : "les 3 boules sont de couleur différente"

D_1 : "la première boule est blanche, la seconde est noire, la troisième est bleue".

On a : $\mathrm{Card}(D_1) = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

L'événement B est encore la réunion disjointe de 6 événements de même probabilité égale à celle de D_1.

Ainsi $P(B) = \frac{6 \times 60}{1320} = \frac{3}{11}$.

Remarque : on obtient les mêmes résultats que lors du tirage simultané. Cela s'explique par le fait que dans les événements A et B l'ordre des boules de tirage n'importe pas. On peut donc s'intéresser seulement au résultat final des trois tirages, ce qui revient à faire un tirage simultané de 3 boules.

E : "la première boule blanche est tirée au troisième tirage".

E est l'ensemble des triplets dont les deux premières composantes forment un arrangement d'un ensemble à 7 éléments et la troisième composant correspond à un numéro de boule blanche.

$\mathrm{Card}(E) = 7 \times 6 \times 5 = 210$. $P(E) = \frac{7}{44}$.

F : "la deuxième boule blanche est tirée au troisième tirage"

F est la réunion disjointe des événements F_1 et F_2 avec F_i : "la $i$ème boule et la troisième boule sont blanches, l'autre n'est pas blanche".

$\mathrm{Card}(F_1) = 5 \times 7 \times 4$ et $\mathrm{Card}(F_2) = 7 \times 5 \times 4$.

D'où $P(F) = \frac{280}{1320} = \frac{7}{33}$.

5. **<u>Exercice 5 :</u>**

a) On note R_i l'événement : "la $i$ème boule tirée est rouge".

On cherche à déterminer $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4)$.

Sous réserve que les probabilités conditionnelles soient bien définies, on a d'après la formule des probabilités composées :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(R_3|R_1 \cap R_2)P(R_4|R_1 \cap R_2 \cap R_3)$$

Comme les boules sont indiscernables au toucher, P est la probabilité uniforme, et $P(R_1) = \frac{r}{n}$.

Si la première boule tirée est rouge, comme les tirages se font sans remise, il reste $n-1$ boules dont r_1 rouges. Par conséquent, $P(R_2|R_1) = \frac{r-1}{n-1}$.
On en déduit que $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) \neq 0$, et la probabilité conditionnelle $P(R_3|R_1 \cap R_2)$ est bien définie.

Si les deux premières boules sont rouges, il reste avant le troisième tirage $n-2$ boules dont $r-2$ rouges, donc $P(R_3|R_1 \cap R_2) = \frac{r-2}{n-2}$.
On obtient alors $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1 \cap R_2)P(R_3|R_1 \cap R_2) \neq 0$, et donc la probabilité conditionnelle $P(R_4|R_1 \cap R_2 \cap R_3)$ est bien définie.

Comme précédemment, on obtient $P(R_4|R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{r-3}{n-3}$.

Ainsi, $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

b) On note A_k : "une boule rouge apparaît pour la première fois au k-ième tirage"
B_i : "la $i$ème boule tirée est blanche".
On a : $A_k = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap R_k$

Sous réserve que les probabilités conditionnelles soient bien définies, on a d'après la formule des probabilités composées :

$$P(A_k) = P(B_1)P(B_2|B_1)\cdots P(B_{k-1}|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2})P(R_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1})$$

On a $P(B_1) = \frac{b}{n}$, puis $P(B_2|B_1) = \frac{b-1}{n-1}$.
On en déduit que $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) \neq 0$.

On suppose que $P(B_1 \cap \cdots \cap B_i) \neq 0$ pour $2 \leq i \leq k-2 < b$.
On obtient $P(B_{i+1}|B_1 \cap \cdots \cap B_i) = \frac{b-i}{n-i} \neq 0$ et donc
$P(B_1 \cap \cdots \cap B_i \cap B_{i+1}) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_i)P(B_{i+1}|B_1 \cap \cdots \cap B_i) \neq 0$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, l' événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ est de probabilité non nulle et :

$$P(R_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}) = \frac{r}{n-k+1}$$

On obtient :

$$P(A_k) = \frac{b(b-1)\cdots(b-k+2)r}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$$

6. **Exercice 10 : (difficile)**

Pour simplifier, on peut supposer que les lettres à distribuer portent des numéros, et même plus précisément que celles pour la boîte 1 sont les lettres 1, 2, ..., r_1, celles pour la boîte 2 sont r_1+1, ..., r_1+r_2, ..., celles pour la boîte p sont $r_1+...+r_{p-1}+1$, ..., $r_1+...+r_p = n$.

Une distribution revient à associer à chaque lettre un numéro de boîte à lettres entre 1 et p.
Ω est donc l'ensemble des applications de $[[1,n]]$ vers $[[1,p]]$: $\mathrm{Card}(\Omega) = p^n$.
On munit Ω de la probabilité uniforme.

a) Parmi toutes les distributions, il n'y en a qu'une seule de correcte.
De ce fait, la probabilité cherchée est $\frac{1}{p^n}$.

b) Pour que la boîte 1 soit correctement remplie, il faut que le facteur lui attribue les lettres 1, 2, ..., r_1 et qu'il distribue les lettres r_1+1, ..., n (ce qui représente $n-r_1$ lettres) dans les $p-1$ autres boîtes. Il y a donc $(p-1)^{n-r_1}$ choix possibles et la probabilité cherchée est $\frac{(p-1)^{n-r_1}}{p^n}$.

c) Dire cette fois qu'il n'y a pas dans la boîte 1 de lettre destiné à un voisin c'est dire que toutes les lettres r_1+1, ..., n sont attribuées aux boîtes 2 à p et que celles numérotées de 1 à r_1 peuvent être mises dans n'importe quelle boîte (elles ne sont pas toutes nécessairement dans la boîte 1, contrairement à la question précédente). Le nombre de possibilités est donc cette fois égal à $p^{r_1}(p-1)^{n-r_1}$ et la probabilité cherchée est $\dfrac{p^{r_1}(p-1)^{n-r_1}}{p^n}$.

d) On peut décrire l'événement comme suit : on choisit r_1 lettres parmi les n et on les attribue à la boîte 1, on choisit r_2 lettres parmi les $n-r_1$ restantes et on les attribue à la boîte 2, ... A la dernière étape, il restera exactement r_p lettres qui seront mises dans la boîte p.
Le nombre de possibilités est par conséquent $\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}...\binom{r_p}{r_p}$. Cette quantité peut se simplifier en $\dfrac{n!}{r_1!...r_p!}$. La probabilité cherchée est donc $\dfrac{n!}{r_1!...r_p!p^n}$.

7. **Exercice 15 :**

L'espace de probabilités est l'ensemble des 2-listes à valeurs dans $\{f,g\}$ (pour fille et garçon) muni de la probabilité uniforme.

a) On note : A : "un des deux enfants est une fille" et B : "un des deux enfants est un garçon".

$A=\{(f,g),(g,f),(f,f)\}$; $B=\{(f,g),(g,f),(g,g)\}$; $A\cap B=\{(f,g),(g,f)\}$.

$$\boxed{P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{3}}$$

b) On note : A' : "le plus jeune des deux enfants est une fille".
$A'=\{(g,f),(f,f)\}$; $A'\cap B=\{(g,f)\}$.

$$\boxed{P_{A'}(B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')}=\frac{1}{2}}$$