On introduit les événements suivants :

- N : « la boule tirée est noire »
- B : « la boule tirée est blanche »
- S_N : « Sylvie annonce que la boule tirée est noire »
- S_B : « Sylvie annonce que la boule est blanche »
- S_{ment} : « Sylvie ment »
- J_N : « Jacques annonce que la boule tirée est noire »
- J_B : « Jacques annonce que la boule est blanche »
- J_{ment} : « Jacques ment »

<u>Interprétation des données de l'énoncé :</u>

$P(N) = \dfrac{3}{10}$ et $P(B) = \dfrac{7}{10}$

Les événements S_{ment}, J_{ment} et N sont mutuellement indépendants.

$S_{ment} = (B \cap S_N) \cup (N \cap S_B)$ et $\overline{S_{ment}} = (B \cap S_B) \cup (N \cap S_N)$

On a, par exemple, $N \cap S_{ment} = \underbrace{(N \cap B \cap S_N)}_{=\emptyset} \cup (N \cap N \cap S_B) = N \cap S_B$

On peut aussi noter que (même si cette probabilité conditionnelle ne sera pas utilisée lors de la résolution de l'exercice) $P_N(S_B) = \dfrac{1}{10}$: la probabilité que Sylvie annonce que la boule est blanche sachant qu'elle est noire est égale à la probabilité qu'elle mente.

On retrouve ce résultat par le calcul : $P_N(S_B) = \dfrac{P(N \cap S_B)}{P(N)} = \dfrac{P(N \cap S_{ment})}{P(N)} = \dfrac{P(N) \times P(S_{ment})}{P(N)} = P(S_{ment})$

<u>Résolution de l'exercice :</u>

On détermine la valeur de $P(N \mid S_B \cap J_N)$.

On a : $P(N \mid S_B \cap J_N) = \dfrac{P(N \cap S_B \cap J_N)}{P(S_B \cap J_N)}$

Les événements N et B forment un système complet d'événements :

$P(S_B \cap J_N) = P(S_B \cap J_N \cap N) + P(S_B \cap J_N \cap B)$

Or $S_B \cap J_N \cap N = S_{ment} \cap \overline{J_{ment}} \cap N$,

d'où $P(S_B \cap J_N \cap N) = P(S_{ment}) \times P(\overline{J_{ment}}) \times P(N)$ par indépendance des événements

$= \dfrac{1}{10} \times \dfrac{19}{20} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{57}{2000}$

Et $S_B \cap J_N \cap B = \overline{S_{ment}} \cap J_{ment} \cap N$,

d'où $P(S_B \cap J_N \cap B) = P(\overline{S_{ment}}) \times P(J_{ment}) \times P(B)$ par indépendance des événements

$= \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{20} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{63}{2000}$

On obtient donc $P(S_B \cap J_N) = \dfrac{120}{2000}$

Ainsi, $P(N \mid S_B \cap J_N) = \dfrac{57}{120} = \dfrac{19}{40}$ et $P(B \mid S_B \cap J_N) = \dfrac{21}{40}$.

Il est (un peu) plus probable que la boule prélevée soit blanche, on préfère croire Sylvie.

<u>Remarque :</u> attention, la notion d'indépendance est une notion probabiliste.

On peut vérifier que les événements S_B et J_N sont indépendants par rapport à la probabilité P_N (et par rapport à la probabilité P_B), mais qu'ils ne les sont pas pour la probabilité P (car ils *dépendent* de N et de B).

$P_N(S_B \cap J_N) = \dfrac{P(N \cap S_B \cap J_N)}{P(N)} = \dfrac{P(N \cap S_{ment} \cap \overline{J_{ment}})}{P(N)} = P(S_{ment}) \times P(\overline{J_{ment}}) = P_N(S_B) \times P_N(J_N)$

$P(S_B) = P(S_B \cap N) + P(S_B \cap B) = P(S_{ment} \cap N) + P(\overline{S_{ment}} \cap B) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{10} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{66}{100}$

Et $P(J_N) = P(J_N \cap N) + P(J_N \cap B) = P(\overline{J_{ment}} \cap N) + P(J_{ment} \cap N) = \dfrac{19}{20} \times \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{20} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{64}{200}$

On a vu que $P(S_B \cap J_N) = \dfrac{120}{2000}$. Donc $P(S_B \cap J_n) \neq P(S_B) \times P(J_N)$.

<u>Complément :</u> on a $P(B) = \dfrac{7}{10}$

On a : $P(B \mid S_B) = \dfrac{P(B \cap S_B)}{P(S_B)} = \dfrac{63}{66} \simeq 0.95$.

L'annonce de Sylvie (dont les propos sont fiables vu qu'elle ne ment qu'une fois sur 10) augmente considérablement la probabilité que la boule tirée soit blanche.

On a : $P(B \mid J_B) = \dfrac{P(B \cap J_B)}{P(J_B)} = \dfrac{133}{136} \simeq 0.98$ et $P(B \mid J_N) = \dfrac{P(B \cap J_N)}{P(J_N)} = \dfrac{7}{64} \simeq 0.11$

Si Jacques annonce que la boule tirée est blanche, la probabilité qu'elle soit blanche augmente davantage (les propos de Jacques sont plus fiables encore).

Par contre, s'il annonce que la boule tirée est noire, alors la probabilité qu'elle soit blanche diminue fortement.

En tenant compte des deux informations contradictoires de Sylvie et Jacques, bien qu'on accorde plus de crédit aux propos de Jacques, la probabilité que la boule tirée soit blanche reste supérieure à $\frac{1}{2}$.