Exercice 8 :

On a : $P(A_1) = \frac{1}{n}$

On remarque que $A_2 \subset \bar{A_1}$

en effet : $\bar{A_1} = A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$

donc $\bar{A_1} \cap A_2 = A_2$

$$P(A_2) = P(A_2 \cap \bar{A_1})$$
$$= P(A_2 \mid \bar{A_1}) \, P(\bar{A_1})$$

Or $P(A_2 \mid \bar{A_1}) = \frac{1}{n-1}$ (il reste $n-1$ clefs et une seule ouvre la porte)

d'où $P(A_2) = \frac{1}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$

Plus généralement, $A_k \subset \bar{A_1} \cap \bar{A_2} \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1}$

$\bar{A_1} \cap \bar{A_2} \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1} = A_k \cup A_{k+1} \cup \ldots \cup A_n$

$$P(A_k) = P(\bar{A_1} \cap \bar{A_2} \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k)$$
$$= P(\bar{A_1})\, P(\bar{A_2} \mid \bar{A_1}) \ldots P(\bar{A}_{k-1} \mid \bar{A_1} \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-2})\, P(A_k \mid \bar{A_1} \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1})$$
$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1}.$$
$$= \frac{1}{n}$$

formule des proba composées

Rque : les evts $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont équiprobables.

Exercice 8 : autre approche :

Notons c_1 la clef du trousseau qui ouvre la porte

Notons $c_2, \dots, c_n$ les autres clefs du trousseau.

- L'expérience aléatoire peut être modélisée de la façon suivante :

  la personne choisit un ordre avec lequel elle va essayer les différentes clefs jusqu'à l'ouverture de la porte : cela revient à choisir une permutation de l'ensemble $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

  On a : $\text{Card}(\Omega) = n!$

  On munit l'univers Ω de la probabilité uniforme.

- L'événement A_k correspond à l'ensemble des permutations dont le k-ième élément est c_1 : il y en a $(n-1)!$. En effet, les autres éléments $c_2, \dots, c_n$ sont choisis dans un ordre quelconque.

$$\boxed{\text{Ainsi} \quad P(A_k) = \frac{\text{Card}(A_k)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}}$$