Exercice 6: (1)

a) Méthode 1: approche probabiliste :

N_i : " on prélève une boule noire au i-ème tirage "

B_i : " on prélève une boule blanche au i-ème tirage "

On pose $A = N_1 \cup N_2 \cup N_3$

$$\bar{A} = \bar{N_1} \cap \bar{N_2} \cap \bar{N_3} = B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(\bar{A}) = P(B_1) \quad P(B_2 | B_1) \quad P(B_3 | B_1 \cap B_2)$$

$$= \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{7}{15}$$

ainsi $\boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{8}{15}}$

Méthode 2: approche combinatoire :

On note $b_1, b_2, \dots, b_8$ les 8 boules blanches
n_1, n_2 les 2 boules noires.

Un tirage peut être représenté par un 3-arrangement de $\{b_1, \dots, b_8, n_1, n_2\}$

$Card(\Omega) = 10 \times 9 \times 8 = 720$

On munit Ω de la probabilité uniforme.

$\bar{A}$ est l'ensemble des 3-arrangements de $\{b_1, \dots, b_8\}$

d'où $Card(\bar{A}) = 8 \times 7 \times 6 = 336$

Puis $Card(A) = Card(\Omega) - Card(\bar{A}) = 384$

Ainsi $\boxed{P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{8}{15}}$

b) On cherche à déterminer $P_A(N_1)$:

$$P_A(N_1) = \frac{P(N_1 \cap A)}{P(A)}$$

Or $N_1 \subset A$ (on rappelle que $A = N_1 \cup N_2 \cup N_3$)

donc $N_1 \cap A = N_1$

Et $P(N_1) = \frac{1}{5}$, ainsi $\boxed{P_A(N_1) = \frac{1/5}{8/15} = \frac{3}{8}}$

c) Les événements $B_1 \cap B_2$, $B_1 \cap N_2$, $N_1 \cap B_2$ et $N_1 \cap N_2$ forment un système complet d'événements.

$$P(N_3) = P(N_3 \cap B_1 \cap B_2) + P(N_3 \cap B_1 \cap N_2)$$

$$+ P(N_3 \cap N_1 \cap B_2) + P(\underbrace{N_3 \cap N_1 \cap N_2}_{\text{impossible}})$$

$$P(N_3 \cap B_1 \cap B_2) = P(B_1)\, P(B_2 | B_1)\, P(N_3 | B_1 \cap B_2)$$

(formule des probabilités composées)

$$= \frac{4}{5} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{7}{45}$$

de m : $P(N_3 \cap B_1 \cap N_2) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{45}$

$P(N_3 \cap N_1 \cap B_2) = \frac{1}{5} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{45}$

$\boxed{\text{Ainsi } P(N_3) = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}}$

c) Méthode combinatoire :

N_3 est l'ensemble des 3-arrangements de $\{b_1, \dots, b_8, m_1, m_2\}$ dont le $3^{ème}$ terme est soit m_1, soit m_2.

Il y a 2 possibilités pour la valeur de la $3^{ème}$ composante

puis 9 possibilités " " " $2^{ème}$ composante

puis 8 possibilités " " $1^{ère}$ composante

D'où $\text{Card}(N_3) = 2 \times 9 \times 8$

et $\text{Card}(\Omega) = 10 \times 9 \times 8$

$$\boxed{\text{Ainsi } P(N_3) = \frac{1}{5}}$$