Exercice 11

Notons p_n la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant en ayant acheté n billets.

Rque : $p_0 = \dots$, $p_{999} = \dots$, $p_{1000} = \dots$

$1-p_n$ est donc la probabilité de n'avoir rien gagné en ayant acheté n billets.

Or il y a $\binom{1000}{2}$ tirages de 2 numéros

Parmi ces tirages, il y a $\binom{1000-n}{2}$ tirages qui ne comportent aucun des numéros des n billets achetés

D'où :

$$1 - p_n = \frac{\binom{1000-n}{2}}{\binom{1000}{2}} = \frac{(1000-n)!\ 998!}{(998-n)!\ 1000!}$$

$$= \frac{(1000-n)(999-n)}{1000 \times 999}$$

$$= 1 - \frac{1999n - n^2}{1000 \times 999}$$

Ainsi, $\boxed{p_n = \frac{1999n - n^2}{1000 \times 999}}$

On cherche à déterminer les valeurs de $n \in [\![0, 1000]\!]$ pour lesquelles on a $p_n \geqslant \frac{1}{2}$:

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \iff 1999n - n^2 \geqslant 500 \times 999$$

$$\iff 0 \geqslant n^2 - 1999n + 500 \times 999$$

Or les racines de $X^2 - 1999n + 500 \times 999$ sont :

$$\alpha_1 \simeq 292,7 \quad \text{et} \quad \alpha_2 \simeq 1706,3$$

On obtient ainsi :

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \iff n \in [\![0, 1000]\!] \cap [\alpha_1, \alpha_2]$$

$$\iff n \in [\![293, 1000]\!]$$

Par conséquent, <u>il faut acheter au minimum 293 billets</u> pour avoir au moins un billet gagnant avec une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$.

Rque. $p_{292} \simeq 0,499$ $\quad p_{293} \simeq 0,5$ (à 10^{-3} près