<u>Exercice 31 : question b</u>

On calcule la probabilité de l'événement $\Big\{X+Y=Z\Big\}$.

• Comme les événements $\Big\{Z=k\Big\}$ avec $k \in [\![1,n]\!]$ forment un système complet d'événements, on a :

$$\Big\{X+Y=Z\Big\} = \bigcup_{k=1}^{n} \Big\{X+Y=k, Z=k\Big\} \qquad \textit{les événements de cette union sont 2 à 2 incompatibles}$$

$$P\Big(X+Y=Z\Big) = \sum_{k=1}^{n} P\Big(X+Y=k, Z=k\Big)$$

D'après le lemme des coalitions, les variables $X+Y$ et Z sont indépendantes,

Par conséquent, $P\Big(X+Y=k, Z=k\Big) = P\Big(X+Y=k\Big)P\Big(Z=k\Big) = \dfrac{1}{n}P\Big(X+Y=k\Big)$.

D'où $P\Big(X+Y=Z\Big) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P\Big(X+Y=k\Big)$

• Calcul de $P\Big(X+Y=k\Big)$:

Les événements $\Big\{X=i\Big\}$ avec $i \in [\![1,n]\!]$ forment un système complet d'événements.

$$\begin{aligned} \text{D'où } P\Big(X+Y=k\Big) &= \sum_{i=1}^{n} P\Big(X+Y=k, X=i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P\Big(Y=k-i, X=i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P\Big(Y=k-i\Big)P\Big(X=i\Big) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \end{aligned}$$

Or $P\Big(X=i\Big) = \dfrac{1}{n}$ et $P\Big(Y=k-i\Big) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } k-i \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par conséquent, $P\Big(X+Y=k\Big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}$

• <u>Calcul final :</u>

$$\begin{aligned} P\Big(X+Y=Z\Big) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k \qquad \textit{après changement d'indice} \\ &= \frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{P\Big(X+Y=Z\Big) = \frac{n-1}{2n^2}}$$