Mathématiques : correction d'exercices du TD 1

1. **Exercice 6 b :**

   Supposons que $E = A \cup B$ et $A \cap C \subset B$ et $B \cap C \subset A$, et montrons que $C \subset A \cap B$.

   Soit $x \in C$.
   Alors $x \in E$ (car C est une partie de E).
   Or $E = A \cup B$, d'où $x \in A \cup B$,
   c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in B$.

   Cas 1 : $x \in A$:

   Alors $x \in A \cap C$.
   Comme $A \cap C \subset B$, on en déduit que $x \in B$.
   Par conséquent, $x \in A \cap B$.

   Cas 2 : $x \in B$:

   Alors $x \in B \cap C$.
   Comme $B \cap C \subset A$, on en déduit que $x \in A$.
   Par conséquent, $x \in A \cap B$.

   Dans les deux cas, on a bien $x \in A \cap B$.

   On a ainsi montré que tous les éléments de l'ensemble C appartiennent à $A \cap B$, c'est-à-dire $C \subset A \cap B$.

   $\boxed{\text{Si } E = A \cup B \text{ et } A \cap C \subset B \text{ et } B \cap C \subset A, \text{ alors } C \subset A \cap B}$

2. **Exercice 10 b :**

   Commentaires et rappels sur la valeur absolue :

   On a : $|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{si } x \geq a \\ a-x & \text{sinon} \end{cases}$

   Afin de faire *disparaître* les valeurs absolues, on va distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de x.
   Pour chaque domaine d'étude considéré, on va résoudre l'équation en la transformant en une équation équivalente simple.

   - **Cas 1 : on suppose que** $x \in [2, +\infty[$.

   $$\begin{aligned} x \text{ est solution de l'équation} &\iff (x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) = x+2 \\ &\iff 0 \cdot x = 0 \end{aligned}$$

   Tous les réels x du domaine d'étude $[2, +\infty[$ vérifient l'équation (très particulière) $0 \cdot x = 0$, et donc sont solutions de l'équation de départ.

   On en déduit que : $S \cap [2, +\infty[= [2, +\infty[$.

   - **Cas 2 : on suppose que** $x \in [1, 2]$.

   $$\begin{aligned} x \text{ est solution de l'équation} &\iff (x+1) - x + 3(x-1) - 2(2-x) = x+2 \\ &\iff 4x = 8 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

   On en déduit que : $S \cap [1, 2] = \{2\}$.

   - **Cas 3 : on suppose que** $x \in [0, 1]$.

   $$\begin{aligned} x \text{ est solution de l'équation} &\iff (x+1) - x + 3(1-x) - 2(2-x) = x+2 \\ &\iff -2x = 2 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

   La condition $x = -1$ n'étant pas compatible avec l'hypothèse $x \in [0, 1]$, on en déduit que l'équation n'admet pas de solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

   Par conséquent : $S \cap [0, 1] = \emptyset$.

   - **Cas 4 : on suppose que** $x \in [-1, 0]$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de l'équation} &\iff (x+1)+x+3(1-x)-2(2-x)=x+2 \\ &\iff 0\cdot x = 2 \end{aligned}$$

Par conséquent : $S\cap[-1,0]=\emptyset$.

• **<u>Cas 5 :</u> on suppose que** $x\in]-\infty,-1]$**.**

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de l'équation} &\iff -(x+1)+x+3(1-x)-2(2-x)=x+2 \\ &\iff -2x=4 \\ &\iff x=-2 \end{aligned}$$

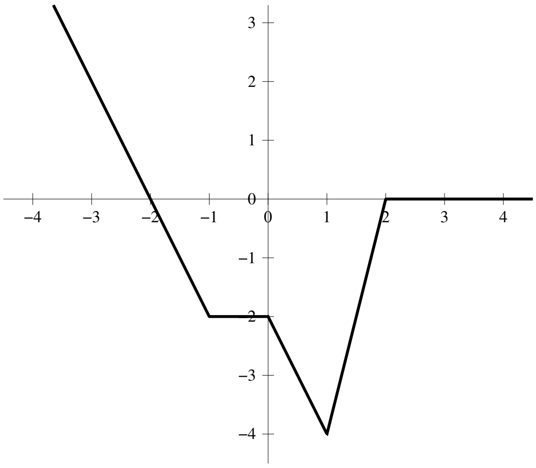
Par conséquent : $S\cap]-\infty,-1]=\{-2\}$.

$\boxed{\text{On en déduit que } S=\{-2\}\cup[2,+\infty[}$

Remarque : on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|-x-2$.

On a alors : $S=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}$.

On représente ci-dessous le graphe de la fonction f.



3. **<u>Exercice 10 c :</u>**

• **<u>Analyse :</u>** supposons x solution de l'équation : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=2$.
On a : $\sqrt{x+1}=\sqrt{x}+2$, donc $x+1=\left(\sqrt{x}+2\right)^2$.
Ce qui donne : $x+1=x+4\sqrt{x}+4$.
On obtient alors : $4\sqrt{x}=-3$, ce qui est impossible.

$\boxed{\text{On en déduit que l'équation n'a pas de solution : l'ensemble des solutions est vide}}$

4. **<u>Exercice 10 d :</u>**

• **<u>Analyse :</u>** supposons x solution de l'équation : $2\sqrt{x+5}+10=x$.
On a : $2\sqrt{x+5}=x-10$, donc $4(x+5)=(x-10)^2$.
Ce qui donne : $x^2-16x+80=0$

$(x-20)(x+4)=0$

$x=20$ ou $x=-4$

On a ainsi montré que si x est solution de l'équation, alors $x=20$ ou $x=-4$.
On a donc : $\mathcal{S}\subset\Big\{-4,20\Big\}$.

• **<u>Synthèse :</u>**

Supposons $x=-4$: $2\sqrt{x+5}+10=16$.
-4 n'est pas solution de l'équation.

Supposons $x=20$: $2\sqrt{x+5}+10=20$.
20 est solution de l'équation.

$\boxed{\text{L'équation admet donc une unique solution : } x=20}$

5. **Exercice 10 g :**

• On remarque que l'inéquation est définie sur $[-1,+\infty[$.

Résoudre l'inéquation revient donc à déterminer l'ensemble S des éléments x appartenant à $[-1,+\infty[$ qui vérifient l'inégalité $\sqrt{x+1} \leq 2(x-2)$:

$$S = \{x \in [-1,+\infty[\ \mid \ \sqrt{x+1} \leq 2(x-2)\}$$

• **Analyse :** supposons x solution de l'inéquation : $2(x-2) \geq \sqrt{x+1}$.

Or comme $\sqrt{x+1} \geq 0$, on en déduit que $2(x-2) \geq 0$, d'où $x \geq 2$.

De plus, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $4(x-2)^2 \geq x+1$,

ce qui donne $4x^2 - 17x + 15 \geq 0$.

On peut étudier le signe du polynôme $P = 4X^2 - 17X + 15$.

P admet deux racines réelles : $\dfrac{5}{4}$ et 3.

P prend donc des valeurs positives sur l'ensemble $]-\infty, \frac{5}{4}] \cup [3,+\infty[$ et prend des valeurs strictement négatives sur $]\frac{5}{4}, 3[$.

Comme on a établi précédemment que $P(x) = 4x^2 - 17x + 15 \geq 0$, on en déduit que $x \in]-\infty, \frac{5}{4}] \cup [3,+\infty[$.

On a également prouvé que $x \geq 2$.

Par conséquent, $x \in [3,+\infty[$.

On a ainsi montré que si x est solution de l'inéquation, alors $x \in [3,+\infty[$, d'où $S \subset [3,+\infty[$.

• **Synthèse :** supposons $x \in [3,+\infty[$.

Alors, d'après ce qui précède (cf étude du polynôme P), $P(x) = 4x^2 - 17x + 15 \geq 0$,

ce qui donne $4x^2 - 16x + 16 \geq x + 1$.

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on obtient alors : $\sqrt{4x^2 - 16x + 16} \geq \sqrt{x+1}$.

*Pour finir la synthèse et prouver que x est solution de l'inéquation, on va utiliser la relation : $\sqrt{a^2} = |a|$.
Lorsque a est positif, on obtient $\sqrt{a^2} = a$, et lorsque a est négatif, on a $\sqrt{a^2} = -a$.
Très souvent, les élèves oublient de préciser des arguments indiquant le signe de a.*

Or $\sqrt{4x^2 - 16x + 16} = \sqrt{(2x-4)^2} = |2x-4|$.

Comme $x \in [3,+\infty[$, alors $2x - 4 \geq 0$, et ainsi $\sqrt{4x^2 - 16x + 16} = 2x - 4$.

On obtient finalement : $2(x-2) \geq \sqrt{x+1}$.

Ainsi, on a montré que si $x \in [3,+\infty[$, alors x est solution de l'inéquation, d'où $[3,+\infty[\subset S$.

$\boxed{\bullet \textbf{ Conclusion : } S = [3,+\infty[}$

6. **Exercice 11 :**

a) Soit n un entier naturel.
Supposons que n ne soit pas pair.
n est donc impair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k^2 + 2k$, $k' \in \mathbb{N}$.
On en déduit que n^2 est impair, donc n'est pas pair.

$\boxed{\text{On a donc montré (\textit{par contraposition}) que pour tout entier naturel } n, \text{ si } n^2 \text{ est pair, alors } n \text{ est pair.}}$

b) Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

Il existe deux entiers p et q non tous les deux pairs tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

On a alors $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, ou encore $2q^2 = p^2$.

p^2 est donc pair.
On en déduit (en utilisant le résultat de la question a) que p **est pair**.
Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$.
On obtient : $2q^2 = 4k^2$, puis $q^2 = 2k^2$.
q^2 est donc pair, et ainsi q **est pair** (toujours d'après la question a).
p et q sont donc tous les deux pairs, ce qui est **contradictoire** avec l'hypothèse de départ.

$\boxed{\text{Ainsi, } \sqrt{2} \text{ est irrationnel}}$

7. **Exercice 15 b :**

   - Soit $P(n)$: $2^n \geq n^2$.

   - $P(4)$ est vraie.

   - Supposons $P(n)$ vraie pour un entier naturel $n \geq 4$.

   On a : $2^n \geq n^2$, donc $2^{n+1} \geq 2n^2$.

   On va alors établir que $2n^2$ est supérieur à $(n+1)^2$ en montrant que la différence est positive.

   Or $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1$
   $\qquad\qquad\qquad = (n-1)^2 + 1$

   Comme $n \geq 4$, alors $(n-1)^2 \geq 9$.

   Par conséquent, $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$.

   On a ainsi : $2^{n+1} \geq 2n^2$ et $2n^2 \geq (n+1)^2$,
   d'où $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. $P(n+1)$ **est vraie.**

   $\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout entier } n \geq 4,\ 2^n \geq n^2}$

8. **Exercice 14 :** (lire le dernier paragraphe de la page 12 du chapitre 1)

   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Supposons que $x^2 \leq 1$ et montrons que $(2-x)^2 \geq 1$.
   Comme $x^2 \leq 1$, alors $x \leq 1$, puis $-x \geq -1$.
   Par conséquent $2 - x \geq 1$.
   Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $(2-x)^2 \geq 1$.

   $\boxed{\text{On a ainsi montré que } \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 1 \text{ ou } (2-x)^2 \geq 1}$

9. **Exercice 18 :**

   - Soit $P(n)$: $u_n = n(n-1)$.

   - $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

   - Supposons $P(n)$, $P(n+1)$ et $P(n+2)$ vraies pour un entier naturel $n \geq 0$.

   On a :
   $$\begin{aligned} u_{n+3} &= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \\ &= 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + n(n-1) \\ &= 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n \\ &= n^2 + 5n + 6 \\ &= (n+3)(n+2) \end{aligned}$$

   $P(n+3)$ **est vraie.**

   $\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout entier } n \geq 0,\ u_n = n(n-1)}$