ANNEXE DU CHAPITRE 3 : POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

Expression de $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$:

On utilise les formules d'Euler et de Moivre :

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\big(e^{i\theta}\big)^n + \big(e^{-i\theta}\big)^n\Big) = \frac{1}{2}\Big[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\Big]$$

On utilise la formule du binôme pour développer :

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(-i\sin\theta)^k\right]$$

Les termes d'indices pairs des deux sommes sont égaux, tandis que les termes d'indices impairs sont opposés.

$$\cos(n\theta) = \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(i\sin\theta)^{2k}$$

On a également : $\big(i\sin\theta\big)^2 = -\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1$, d'où $(i\sin\theta)^{2k} = (\cos^2\theta-1)^k$.

Ainsi : $\cos(n\theta) = \displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(\cos^2\theta - 1)^k$

Premières valeurs de n :

$\cos(2\theta) = \binom{2}{0}\cos^2\theta + \binom{2}{2}(\cos^2\theta-1) = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos(3\theta) = \binom{3}{0}\cos^3\theta + \binom{3}{2}\cos\theta(\cos^2\theta-1) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos(4\theta) = \binom{4}{0}\cos^4\theta + \binom{4}{2}\cos^2\theta(\cos^2\theta-1) + \binom{4}{4}(\cos^2\theta-1)^2 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

De même, après calculs, on obtient : $\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$.

Polynômes de Tchebychev de première espèce :

Tchebychev (mathématicien russe du $19^{\text{ième}}$ siècle) a introduit les polynômes T_n tels que

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

D'après les calculs précédents, $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

En substituant à x l'expression $\cos\theta$, on obtient effectivement : $T_2(\cos\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$.

On obtient également : $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

Expression de $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

On peut également définir un polynôme U_n tel que $\sin\theta \times U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta)$.

Les polynômes U_n s'appellent polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

$$\begin{aligned}\sin(n\theta) &= \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\Big(\big(e^{i\theta}\big)^n - \big(e^{-i\theta}\big)^n\Big) = \frac{1}{2i}\Big[(\cos\theta + i\sin\theta)^n - (\cos\theta - i\sin\theta)^n\Big] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(-i\sin\theta)^k\right] \\ &= \frac{1}{i}\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}(\cos\theta)^{n-2k-1}(i\sin\theta)^{2k+1}\end{aligned}$$

Et $(i\sin\theta)^{2k+1} = i\sin\theta \times (i\sin\theta)^{2k} = i\sin\theta \times (\cos^2\theta - 1)^2$.

Ainsi : $\sin(n\theta) = \sin\theta \times \displaystyle\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}(\cos\theta)^{n-2k-1}(\cos^2\theta - 1)^k$

Premières valeurs de n :

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$	$U_2(x) = 2x$
$\sin(3\theta) = \sin\theta \times (4\cos^2\theta - 1)$	$U_3(x) = 4x^2 - 1$
$\sin(4\theta) = \sin\theta \times (8\cos^3\theta - 4\cos\theta)$	$U_4(x) = 8x^3 - 4x$