1. **Propriétés de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$:**

En 1889, le mathématicien italien Peano répertoria les propriétés structurelles de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels afin d'en donner une construction axiomatique. A partir de 5 axiomes, Peano reconstruit et démontre toutes les propriétés de $\mathbb{N}$:

- (A_1) : 0 est un entier naturel
- (A_2) : tout entier naturel n possède un successeur (qui sera noté $n+1$)
- (A_3) : il n'existe pas d'entier naturel dont le successeur est 0.
- (A_4) : des nombres entiers distincts ont des successeurs distincts (ie $n \neq n' \Longrightarrow n+1 \neq n'+1$)
- (A_5) : si une propriété est vérifiée pour l'entier 0 et si elle est héréditaire, alors la propriété est vraie pour tous les entiers naturels (principe de récurrence)

Propriété :
(a) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
(b) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Démonstration :
(a) Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$.
Supposons par l'absurde que A n'admette pas de plus petit élément.
Soit $P(n)$: A est minorée par n.

A est minorée par 0, car toute partie de $\mathbb{N}$ l'est : $P(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que n est un minorant de A.
Comme par hypothèse, A n'admet pas de plus petit élément, nécessairement $n \notin A$.
Par conséquent, $\forall a \in A$, $a > n$ et donc $a - n > 0$.
De plus, $a - n$ est un entier. Par conséquent, $a - n \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi, $\forall a \in \mathbb{N}$, $a \geq n+1$, ce qui prouve $P(n+1)$.

On en déduit, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, n minore A.

Or A est non vide, donc contient un élément a.
L'entier $n = a+1$ minore A, ce qui donne $a+1 \leq a$. **Contradiction.**

Ainsi, A admet un plus petit élément.

(b) Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$.
Notons B l'ensemble des majorants entiers de A.
B est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc d'après (a) admet un plus petit élément b.

- supposons dans un premier temps que $b = 0$.

A est non vide donc contient un élément a.
$a \in \mathbb{N}$, donc $a \geq 0$.
Et $a \leq b = 0$.
On en déduit que $a = 0$.
Ainsi $A = \{0\}$, et donc A admet 0 comme plus grand élément.

- supposons désormais que $b \neq 0$.

Alors $b - 1 \in \mathbb{N}$ et $b-1$ n'appartient pas à B (car B a pour plus petit élément b).
Par conséquent, $b-1$ ne majore pas A : il existe donc $a \in A$ tel que $b - 1 < a$.
Comme $a - b + 1$ est un entier, on en déduit que $a - b + 1 \in \mathbb{N}^*$ et donc $a - b + 1 \geq 1$ ou encore $a \geq b$.
De plus, b majore A, d'où $b \geq a$.
Ainsi, $b = a$ et donc $b \in A$.
Ainsi, b est un élément de A et majore A : b est le plus grand élément de A.

Propriété :
(a) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
(b) Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Démonstration :
(a) Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$.
On distingue deux cas :

- On suppose que $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$:

Alors $A \cap \mathbb{N}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, donc admet un plus grand élément.
$m \in A$ et m majore A.

Donc m est le plus grand élément de A.

- On suppose que $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$:

On définit alors l'ensemble $A' = \{-n \ ; \ n \in A\}$.
Alors A' est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément m.
$m \in A'$ donc $-m \in A$.
Et $\forall a \in A$, $-a \in A'$ donc $-a \geq m$ et par conséquent $a \leq -m$.
$-m$ est donc le plus grand élément de A.

(b) Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$.
On définit l'ensemble $A' = \{-n \mid n \in A\}$.
A' est une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$, donc admet un plus grand élément m d'après (1).
$-m$ est alors le plus petit élément de A.

---

2. **Caractérisations des intervalles de $\mathbb{R}$:**

On considère ici une partie non vide I de $\mathbb{R}$ qui vérifie la proposition :

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad a \leq b \Longrightarrow [a, b] \subset I$$

Montrons que I est de la forme $]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $[a, b]$ ou $]-\infty, b[$ ou $]-\infty, b]$ ou $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$.

On distingue pour cela plusieurs cas :

- on suppose I non minoré et majoré :

I est alors une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure b.

si $b \in I$: montrons alors par double inclusion que $I =]-\infty, b]$.

Soit pour cela $x \in I$. Comme b est un majorant de I, alors $x \leq b$ et donc $x \in]-\infty, b]$.

Réciproquement, soit $x \in]-\infty, b]$. I n'est pas minorée, donc x n'est pas un minorant de I.
Il existe donc $a \in I$ tel que $a < x$.
Alors $x \in [a, b]$. Comme $a \in I$ et $b \in I$, alors $[a, b] \subset I$ et donc $x \in I$.
Ainsi, $I =]-\infty, b]$

si $b \notin I$: montrons alors par double inclusion que $I =]-\infty, b[$.

Soit pour cela $x \in I$. Comme b est un majorant de I, alors $x \leq b$.

Le cas d'égalité $x = b$ est exclu car $x \in I$ et $b \notin I$.

Par conséquent, $x < b$ et donc $x \in]-\infty, b[$.

Réciproquement, soit $x \in]-\infty, b[$.

Comme $x < b$ et b est le plus petit des majorants de I, alors x ne majore pas I.

Il existe $c \in I$ tel que $x < c$.

I n'est pas minorée, donc x n'est pas un minorant de I.

Il existe donc $a \in I$ tel que $a < x$.

Alors $x \in [a, c]$. Comme $a \in I$ et $c \in I$, alors $[a, c] \subset I$ et donc $x \in I$.

Ainsi, $I =]-\infty, b[$

- Les autres cas se traitent de manière analogue :

Si I est minoré et non majoré, alors on montre que $I =]a, +\infty[$ ou $I = [a, +\infty[$ où a est la borne inférieure de I.

Si I est minoré et majoré, alors on montre que $I =]a, b[$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$ ou $I = [a, b]$ où a (resp. b) est la borne inférieure (resp. supérieure) de I.

Si I est non minoré et non majoré, alors on montre que $I =]-\infty, +\infty[$.

---

3. **Parties denses de $\mathbb{R}$:**

$\boxed{\textbf{Théorème : } \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{D} \text{ sont denses dans } \mathbb{R}}$

Démonstration : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

L'objectif ici est de **construire** un rationnel $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, un irrationel x et un nombre décimal $\dfrac{k}{10^n}$ qui soient dans l'intervalle $]a, b[$.

• On va commencer par expliquer comment on a obtenu l'expression de p et q dans la démonstration du cours de l'existence d'un nombre rationnel dans $]a, b[$.

L'idée est de chercher deux nombres rationnels de la forme $\dfrac{p}{q}$ et $\dfrac{p+1}{q}$ dans l'intervalle $]a, b[$:

$$a < \frac{p}{q} < b \quad \text{et} \quad a < \frac{p+1}{q} < b$$

On obtient alors (en multipliant la première inégalité par -1 et sommant les inégalités) :

$$\frac{1}{q} < b - a \text{ ou encore } q > \frac{1}{b-a}$$

q doit être un entier strictement supérieur à $\dfrac{1}{b-a}$: on choisit alors de poser $q = \left\lfloor \dfrac{1}{b-a} \right\rfloor + 1$.

Ensuite $p > qa$: on choisit de poser $p = \lfloor qa \rfloor + 1$.

Il a été justifié dans le cours que p et q conviennent effectivement.

• **Construction d'un irrationel x dans l'intervalle $]a, b[$:**

On coupe pour cela l'intervalle en deux à l'aide du milieu $\frac{a+b}{2}$.

D'après ce qui précède, il existe dans le premier intervalle ouvert $]a, \frac{a+b}{2}[$ un rationnel r_1 et il existe dans le second intervalle ouvert $]\frac{a+b}{2}, b[$ un rationnel r_2 :

$$a < r_1 < r_2 < b$$

On pose alors $x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1)$.

Vérifions que x convient.

$\frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1)$ est le produit d'un irrationnel et d'un rationnel non nul, donc est irrationnel.
Par conséquent, x est la somme d'un rationnel et d'un irrationnel, donc est irrationnel.

Comme $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, alors $x \in]r_1, r_2[$, donc $x \in]a, b[$.

• **Construction d'un nombre décimal dans l'intervalle $]a, b[$:**

Notons n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'entier q défini précédemment.

Alors $q < 10^n$ et donc $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{q} < b - a$

On pose ensuite $k = \lfloor 10^n a \rfloor + 1$.

On a alors $10^n a < k \leq 10^n a + 1$, donc $a < \frac{k}{10^n} < a + \frac{1}{10^n} < a + (b - a) = b$.

$\frac{k}{10^n}$ est donc un nombre décimal dans l'intervalle $]a, b[$.

• **Autre construction possible d'un nombre décimal dans l'intervalle $]a, b[$:**

Comme 10^n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, il existe un entier n tel que $10^n > \dfrac{1}{b-a}$.
On pose alors :

$$d = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor + 1}{10^n}$$

On a (cf cours sur les approximations décimales d'un nombre réel) :

$$d - \frac{1}{10^n} \leq a < d$$

Donc

$$d \leq a + \frac{1}{10^n} < a + (b - a) = b$$

Ainsi, $d \in]a, b[$.