1. **Limites de la fonction ln :**

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty}$$

On rappelle le résultat suivant : toute fonction f définie sur $]a,b[$ (ou $[a,b[$) croissante et non majorée admet la limite $+\infty$ en b. Ce résultat sera démontré dans le chapitre ***Limites et continuité*** *et est le résultat analogue du théorème suivant sur les suites réelles : toute suite réelle croissante non majorée diverge vers $+\infty$.*

Démonstration :

Comme $\ln(2^n) = n\ln(2)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, la fonction ln n'est pas majorée (*elle prend des valeurs arbitrairement grandes*).
De plus, elle est croissante. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par composition des limites, } \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Comme $\ln(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on obtient alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

2. **Croissances comparées**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

Plus généralement, pour $\alpha \in]0,+\infty[$, $\beta \in]0,+\infty[$ et $\gamma \in]0,+\infty[$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln^\beta(x)} = +\infty$$

Démonstration :

<u>un résultat intermédiaire :</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^x - x$.
f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) = e^x - 1 \geq 0$.
f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $f(x) \geq f(0) \geq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in]0,+\infty[\quad e^x \geq x}$$

<u>un premier résultat de limite :</u>

Soit $x \in]0,+\infty[$. On a :

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}}{x} = \frac{e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}}}{x} \geq \frac{\frac{x}{2} \times e^{\frac{x}{2}}}{x} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2} = +\infty$, on en déduit avec le théorème de minoration que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

un deuxième résultat de limite :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty\end{array}\right\} \text{ donc par composition des limites, on a } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln x}}{\ln x}=+\infty$$

$$\text{c'est-à-dire } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x}=+\infty$$

un troisième résultat de limite :

$$\frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha}=\exp(\gamma x-\alpha\ln x)=\exp\left(x\times\left(\gamma-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\gamma-\alpha\dfrac{\ln x}{x}\right)=\gamma$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\gamma x}}{x^\alpha}=+\infty$

un quatrième résultat de limite :

$$\frac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta}=\exp(\alpha\ln(x)-\beta\ln(\ln(x)))=\exp\left(\ln(x)\times\left(\alpha-\beta\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}=0\end{array}\right\} \text{ donc par composition des limites, on a } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}=0$$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha-\beta\dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)=\alpha$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta}=+\infty$

Croissances comparées au voisinage de 0 :

$\lim\limits_{x\to0} x\ln(x)=0$,

et plus généralement, pour $\alpha\in]0,+\infty[$ et $\beta\in]0,+\infty[$, on a : $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha|\ln(x)|^\beta=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\ln(x)}{x}=0\end{array}\right\} \text{ donc par composition des limites, on a } \lim_{x\to0^+} \frac{-\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=0$$

$$\text{ce qui donne } \lim_{x\to0^+} x\ln(x)=0$$

Plus généralement, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|\ln(x)|^\beta}{x^\alpha}=0\end{array}\right\} \text{ donc par composition des limites, on a } \lim_{x\to0^+} \frac{|\ln(\frac{1}{x})|^\beta}{\frac{1}{x^\alpha}}=0$$

$$\text{ce qui donne } \lim_{x\to0^+} x^\alpha|\ln(x)|^\beta=0$$