Exercice 1 : inégalités (7 pts)

1. Soient $x \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$.

   <u>Méthode 1 :</u>
   Comme $y \leq 1$, on a : $1-y \geq 0$.
   On multiplie l'inégalité par $x \leq 1$ par $1-y$ (qui est positif), cela donne : $x(1-y) \leq 1-y$
   c'est-à-dire $x - xy \leq 1-y$
   On obtient donc $x+y \leq 1+xy$.

   <u>Méthode 2 :</u> *on étudie le signe de la différence* $1+xy-(x+y)$

   $$\begin{aligned}1+xy-x-y &= 1+x(y-1)-y\\ &= 1-y-x(1-y)\\ &= (1-y)(1-x)\end{aligned}$$
   Comme x et y sont inférieurs à 1, alors $1-y$ et $1-x$ sont positifs.
   Par conséquent, $1+xy-x-y \geq 0$, et donc : $1+xy \geq x+y$.

   <u>Méthode 3 :</u> on définit la fonction f sur $[0,1]$ par $f(x) = x+y-1-xy$ (où $y \in [0,1]$, y constant).
   f est dérivable et $\forall x \in [0,1] \quad f'(x) = 1-y \geq 0$ car $y \leq 1$.
   f est donc croissante : $\forall x \in [0,1] \quad f(x) \leq f(1)$
   Comme $f(1) = 0$, on obtient : $x+y-1-xy \leq 0$

   $\boxed{\text{Ainsi } \forall x \in [0,1] \quad \forall y \in [0,1] \qquad x+y \leq 1+xy \qquad \textbf{(1.5 pt)}}$

2. Soit $t \in [0,1]$.
   Soit $k \in [\![0\,,\,n]\!]$.
   Par croissance des fonctions $x \mapsto x^k$ et $x \mapsto x^{2n-k}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a : $t^k \leq 1$ et $t^{2n-k} \leq 1 \qquad (1^k = 1^{2n-k} = 1)$
   On applique le résultat précédent aux réels t^k et t^{2n-k} (qui appartiennent à l'intervalle $[0,1]$) :
   $$t^k + t^{2n-k} \leq 1 + t^{2n}$$
   On multiple par le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (qui est positif) :
   $$\binom{n}{k} t^k + \binom{n}{k} t^{2n-k} \leq \binom{n}{k}\left(1+t^{2n}\right)$$
   On somme ces inégalités :
   $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^{2n-k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+t^{2n}\right)$$
   Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+t^{2n}\right) = \left(1+t^{2n}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \left(1+t^{2n}\right)2^n$

   Rappels : d'après la formule du binôme, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

   en particulier, $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

   $$\boxed{\text{Ainsi, } \forall t \in [0,1] \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^{2n-k} \leq 2^n(1+t^{2n}) \qquad \textbf{(2.5 pts)}}$$

3. D'après la formule du binôme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^k = (1+t)^n$
   $$\text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^{2n-k} = t^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^{n-k} = t^n(1+t)^n$$
   $$\text{D'où } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^{2n-k} = (1+t)^n + t^n(1+t)^n = (1+t)^n(1+t^n)$$

   $\boxed{\text{L'inégalité de la question 2 s'écrit alors : } \forall t \in [0,1] \quad (1+t)^n(1+t^n) \leq 2^n(1+t^{2n}) \qquad \textbf{(1 pt)}}$

4. Soient a et b deux réels positifs.
Quitte à échanger les rôles de a et b, on peut supposer que $a \leq b$.
Si $b=0$: alors $a=0$
Dans ce cas, $(a+b)^n(a^n+b^n)=0$ et $2^n(a^{2n}+b^{2n})=0$.
Si $b>0$: on pose $t=\dfrac{a}{b}$.
Comme $t \in [0,1]$, d'après l'inégalité précédente, on a :
$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n\left(1+\frac{a^n}{b^n}\right) \leq 2^n\left(1+\frac{a^{2n}}{b^{2n}}\right)$$
Ce qui donne :
$$\left(\frac{b+a}{b}\right)^n\frac{b^n+a^n}{b^n} \leq 2^n\frac{b^{2n}+a^{2n}}{b^{2n}}$$
En multipliant par b^{2n} (qui est positif), on obtient :
$$(b+a)^n(b^n+a^n) \leq 2^n(b^{2n}+a^{2n})$$
Ainsi, pour tous réels positifs a et b, $(a+b)^n(a^n+b^n) \leq 2^n(a^{2n}+b^{2n})$ **(2 pts)**

Exercice 2 : étude de fonctions (11 pts)

1. (a) On compare le numérateur et le dénominateur : $1+x-2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$.
On a donc : $0 \leq 2\sqrt{x} \leq 1+x$
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f(x) \leq 1$ **(1 pt)**

(b) Soit $x \in]0,+\infty[$.
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{x+1}=\frac{2\sqrt{x}}{x+1}=f(x)$$
Ainsi, $\forall x \in]0,+\infty[\quad f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ **(0.75 pt)**

(c) D'après les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x)=\frac{\frac{1+x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{(1+x)^2}=\frac{(1+x)-2x}{\sqrt{x}(1+x)^2}=\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} \quad \textbf{(1.25 pt)}$$
Dérivabilité en 0 : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{2}{\sqrt{x}(x+1)}$
Comme $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}(x+1)=0^+$, alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$.
f n'est donc pas dérivable en 0. (0.75 pt)

(d) **Barème : 1.25 pt**
$f'(x)$ est du signe de $1-x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$$f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)}$$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=+\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$

Autre justification possible : d'après la question b, $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
$$\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0 \\ f(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0 \end{array}\right\} \text{par composition des limites, } \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

2. (a) F est la composée de arcsin et f.
f est strictement croissante sur $[0,1]$ et arcsin est strictement croissante, donc F est strictement croissante sur $[0,1]$.
f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et arcsin est strictement croissante, donc F est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. **(0.75 pt)**

(b) La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $[0,1]$.
On exclut du domaine d'application des théorèmes opératoires les valeurs de x pour lesquels $f(x)=1$.
Or la fonction f prend la valeur 1 seulement au point 1.
On peut donc appliquer les théorèmes opératoires sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. (0.75 pt)

$$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}}\times f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x)^2-4x}{(1+x)^2}}}\times f'(x)=\frac{\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{x^2-2x+1}}\times\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

Or $\sqrt{(1+x)^2}=1+x$ car $1+x\geq 0$,
Et $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.
Ainsi, $F'(x)=\dfrac{1-x}{|x-1|\sqrt{x}(1+x)}$

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x\in]0,1[\\[2ex] \dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}\qquad \textbf{(1.75 pt)}$$

3. (a) On a : $\tan(\theta)=\sqrt{x}$

$$\text{D'où : }\frac{2\sqrt{x}}{1+x}=\frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}=\frac{2\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1+\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}=\frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}=\sin(2\theta)\qquad \textbf{(1 pt)}$$

(b) **Barème : 1.75 pt**
On en déduit que $F(x)=\arcsin(\sin(2\theta))$.
***Attention,** la relation* $\arcsin(\sin(t))=t$ *n'est valable que pour* $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
On distingue deux cas :
• Si $x\leq 1$: alors $0\leq\sqrt{x}\leq 1$, donc $\arctan(0)\leq\arctan(\sqrt{x})\leq\arctan(1)$ par croissance de la fonction arctan.
Puis $0\leq 2\theta\leq\frac{\pi}{2}$.
D'où $F(x)=2\theta=2\arctan(\sqrt{x})$

• Si $x>1$: alors $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$
donc $\frac{\pi}{2}<2\theta<\pi$, puis $0<\pi-2\theta<\frac{\pi}{2}$
D'où $F(x)=\arcsin(\sin(\pi-2\theta))=\pi-2\theta=\pi-2\arctan(\sqrt{x})$

Autre justification possible :
Si $x>1$, alors $F(x)=F\left(\frac{1}{x}\right)$ en utilisant le résultat de la question 1b.
Comme $\frac{1}{x}\in\left]0,1\right[$, alors $F\left(\frac{1}{x}\right)=2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(\sqrt{x})\right)$

Exercice 3 : Étude d'une fonction (11.5 pts)

1. **Barème : 2.25 pts.**
Détail : monotonie de f (0.5 pt) - application du thm de la bijection (0.5 pt) - limites de g pour la détermination de J (0.75 pt) - dérivabilité de h (0.5 pt)

La fonction g est impaire.

D'après les théorèmes opératoires, g est dérivable et $\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)=\text{ch}(x)-1$.
Donc $g'(0)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad g'(x)>0$.

La fonction g est donc **strictement croissante, et continue** sur $\mathbb{R}$, par conséquent elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right[$.

Or $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}-x=e^x\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^{-2x}}{2}-\dfrac{x}{e^x}\right)$, et d'après les croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^{-2x}}{2}-\dfrac{x}{e^x}\right)=\dfrac{1}{2}$, puis que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

Comme g est impaire, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

$\boxed{\text{Ainsi, } J=\mathbb{R}}$

g dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction g' s'annule en 0

D'après le théorème sur la dérivabilité d'une bijection réciproque, la fonction h n'est pas dérivable au point x tel que $g'(h(x)) = 0$, c'est-à-dire tel que $h(x) = 0$.

Or $h(0) = 0$. **On en déduit que h n'est pas dérivable en 0.**

$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$

2. (a) **Barème : 1 pt.**

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-a) = +\infty$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-a) = -\infty$, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

Comme $\lim\limits_{x\to0^+} (x-a) = -a$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \text{th}(x) = 0^+$, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty}$

Comme $\lim\limits_{x\to0^-} (x-a) = -a$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \text{th}(x) = 0^-$, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty}$

(b) **Barème : questions b et c (1.75 pt) - question d (1.25 pt).**

On a : $x\big(1-\text{th}(x)\big) = x\left(1 - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right) = x \times \dfrac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+e^{-x}} = 0$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(1-\text{th}(x)\big) = 0}$

(c) $f(x) - x = \dfrac{x - a - x\text{th}(x)}{\text{th}(x)} = \dfrac{x(1-\text{th}(x)) - a}{\text{th}(x)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(1-\text{th}(x)\big) - a = -a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$, d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -a}$

On en déduit que la droite Δ_1 d'équation $y = x - a$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$

(d) De même, on a $f(x) + x = \dfrac{x(1+\text{th}(x)) - a}{\text{th}(x)}$

On peut se servir du résultat de la question b en remarquant que $x\big(1+th(x)\big) = x\big(1-th(-x)\big)$.

$$\left.\begin{array}{l} t = -x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \\ t\big(1-\text{th}(t)\big) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \text{par composition de limites, on obtient } \lim_{x\to-\infty} -x\big(1-\text{th}(-x)\big) = 0$$

La fonction th étant impaire, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} x(1+\text{th}(x)) = 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+x) = a}$

On en déduit que la droite Δ_2 d'équation $y = -x + a$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$

3. (a) D'après les théorèmes opératoires, f est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \frac{\text{th}(x) - \dfrac{x-a}{\text{ch}^2(x)}}{\text{th}^2(x)} = \frac{\text{th}(x)\text{ch}^2(x) - x + a}{\text{th}^2(x)\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{sh}(x)\text{ch}(x) - x + a}{\text{sh}^2(x)}$$

Or $2\text{sh}(x)\text{ch}(x) = \text{sh}(2x)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \frac{\text{sh}(2x) - 2x + 2a}{2\text{sh}^2(x)} \qquad \textbf{(1 pt)}}$$

(b) On a : $f'(x) = 0 \iff \text{sh}(2x) - 2x = -2a$

$\iff g(2x) = -2a$

Or, la fonction g est bijective, par conséquent, l'équation $g(2x) = -2a$ possède une unique solution : le nombre réel $b = \dfrac{h(-2a)}{2}$. Il reste à justifier que $b \in \mathbb{R}^*$.

La fonction h étant strictement croissante, on a : $h(-2a) < h(0)$, ce qui entraîne que $b < 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } f'(x) = 0 \text{ admet une unique solution } b = \frac{h(-2a)}{2} \qquad \textbf{(0.75 pt)}}$$

On a : $f(b) = \dfrac{b-a}{\operatorname{th}(b)}$

Or $f'(b) = 0$, donc $\operatorname{sh}(2b) - 2b + 2a = 0$, d'où $b - a = \dfrac{\operatorname{sh}(2b)}{2} = \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(b)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f(b) = \dfrac{\operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(b)}{\operatorname{th}(b)} = \operatorname{ch}^2(b) \qquad \textbf{(1 pt)}}$$

(c) **Barème : question 3c (1 pt) - question 4 (1.5 pt).**

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\operatorname{sh}(2x) - 2x + 2a = g(2x) + 2a$.
Or la fonction $x \mapsto g(2x) + 2a$ est une fonction strictement croissante (d'après la question 1).
Par conséquent, si $x > b$, alors $f'(x) > 0$. Et si $x < b$, alors $f'(x) < 0$.

x	$-\infty$		b			0			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$\Vert$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\operatorname{ch}^2(b)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$	-∞	$\nearrow$	$+\infty$

4. On note que f s'annule en a et $f'(a) = \dfrac{\operatorname{sh}(2a)}{2\operatorname{sh}^2(a)} = \dfrac{\operatorname{ch}(a)}{\operatorname{sh}(a)} > 1$.

Les deux asymptotes se coupent au point d'abscisse $(a, 0)$.