THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Démonstration du théorème fondamental de l'analyse dans le cas où f est supposée de plus croissante :

Hypothèses et notations :

• $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et croissante sur l'intervalle I
• a est un élément de I.
• F est la fonction définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Preuve que F est dérivable et que $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$:
Soit $x \in I$.

• Soit h un réel strictement positif tel que $x + h \in I$.

On a : $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t + \int_x^a f(t)\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$ (relation de Chasles)

Comme f est croissante, on a : $\forall t \in [x, x+h] \quad f(x) \leq f(t) \leq f(x+h)$.

Par croissance de l'intégrale (ici $x < x+h$), on obtient : $\displaystyle\int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}t \leq \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_x^{x+h} f(x+h)\mathrm{d}t$.

Ce qui donne : $h\, f(x) \leq \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \leq h\, f(x+h)$.

Ainsi, $f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Comme f est continue au point x, on a : $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} f(x+h) = f(x)$.

Le théorème d'encadrement permet de conclure que $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

• Soit h un réel strictement négatif tel que $x + h \in I$. **Attention**, dans cette partie, on a : $x + h < x$.

On a : $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{x+h}^x f(t)\mathrm{d}t$

Comme f est croissante, on a : $\forall t \in [x+h, x] \quad f(x+h) \leq f(t) \leq f(x)$.

Par croissance de l'intégrale (ici $x + h < x$), on obtient : $\displaystyle\int_{x+h}^x f(x+h)\mathrm{d}t \leq \int_{x+h}^x f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{x+h}^x f(x)\mathrm{d}t$.

Ce qui donne : $-h\, f(x+h) \leq \displaystyle\int_{x+h}^x f(t)\mathrm{d}t \leq -h\, f(x+h)$

ou encore $-h\, f(x+h) \leq -(F(x+h) - F(x)) \leq -h\, f(x+h)$

En multipliant par $-\dfrac{1}{h}$ (qui est strictement positif), on obtient : $f(x+h) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x)$.

Comme f est continue au point x, on a : $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} f(x+h) = f(x)$.

Le théorème d'encadrement permet de conclure que $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Ainsi, F est dérivable au point x et $F'(x) = f(x)$.

Théorème : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre deux $ay'' + by' + cy = 0 \quad (E)$.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue 3 cas :

1. **<u>Si $\Delta > 0$:</u>** alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.
   Les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
2. **<u>Si $\Delta = 0$:</u>** alors l'équation caractéristique admet une solution réelle double r_0.
   Les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto (C_1 + C_2 x)e^{r_0 x}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
3. **<u>Si $\Delta < 0$:</u>** alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$.
   Les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x))e^{\alpha x}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Démonstration : Lorsque $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, on reprend la même démonstration que lors de la détermination des solutions complexes.

Supposons désormais $\Delta < 0$.

Notons : $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation (E).
$\widetilde{\mathcal{S}}$ l'ensemble des solutions complexes de l'équation (E).

Il est évident que $\mathcal{S} \subset \widetilde{\mathcal{S}}$,
et on sait que $\widetilde{\mathcal{S}}$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto A_1 e^{(\alpha+i\omega)x} + A_2 e^{(\alpha-i\omega)x} \quad$ avec $(A_1, A_2) \in \mathbb{C}^2$

<u>Analyse :</u> Soit f un élément de $\mathcal{S}$.
Alors $f \in \widetilde{\mathcal{S}}$: donc il existe $(A_1, A_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= A_1 e^{(\alpha+i\omega)x} + A_2 e^{(\alpha-i\omega)x} \\ &= A_1 e^{\alpha x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)) + A_2 e^{\alpha x}(\cos(\omega x) - i\sin(\omega x)) \end{aligned}$$

En particulier, on a $f(0) = A_1 + A_2$.
Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a donc : $\mathrm{Im}(A_1 + A_2) = 0$, donc $\mathrm{Im}(A_2) = -\mathrm{Im}(A_1)$.

De plus, $f\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right) = ie^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}}(A_1 - A_2) \in \mathbb{R}$ et donc $\mathrm{Re}(A_1 - A_2) = 0$ et ainsi $\mathrm{Re}(A_2) = \mathrm{Re}(A_1)$

On en déduit que $A_2 = \overline{A_1}$.
On pose alors $C_1 = 2\mathrm{Re}(A_1)$ et $C_2 = -2\mathrm{Im}(A_1)$.
On a alors $A_1 = \frac{C_1 - iC_2}{2}$
On obtient donc :

$$f(x) = \frac{C_1 - iC_2}{2} e^{\alpha x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)) + \frac{C_1 + iC_2}{2} e^{\alpha x}(\cos(\omega x) - i\sin(\omega x))$$

D'où $f(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\omega x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\omega x)$.

<u>Synthèse :</u>

On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{(\alpha+i\omega)x}$ et on désigne par f_1 et f_2 respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de F.

On a donc : $f_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\omega x)$ et $f_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\omega x)$.

F est une solution complexe de l'équation (E) : $aF'' + bF' + cF = 0$.

Donc $\mathrm{Re}(aF'' + bF' + cF) = 0$ et $\mathrm{Im}(aF'' + bF' + cF) = 0$.

Ce qui donne $a\mathrm{Re}(F)'' + b\mathrm{Re}(F)' + c\mathrm{Re}(F) = 0$ et $a\mathrm{Im}(F)'' + b\mathrm{Im}(F)' + c\mathrm{Im}(F) = 0$

Par conséquent, f_1 et f_2 sont des solutions (réelles) de l'équation (E).

Donc, toute combinaison linéaire $C_1 f_1 + C_2 f_2$ est solution de (E).