Exercice 23 :

Analyse : supposons y solution du problème.

On a trouvé la forme de $y(x)$: il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]1, +\infty[\quad y(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 + C}$.

Il reste à analyser les conditions sur C pour que y soit bien définie.

Pour cela, le dénominateur $x^2 + C$ ne doit pas s'annuler sur $]1, +\infty[$.

Si $C > 0$, alors $\forall x \in]1, +\infty[\quad x^2 + C > 0$.

Si $C < 0$, alors $x^2 + C$ admet deux valeurs d'annulation sur $\mathbb{R}$: $x_1 = -\sqrt{-C}$ et $x_2 = \sqrt{-C}$.

Il est évident que $x_1 \notin]1, +\infty[$.

On a : $x_2 \in]1, +\infty[\iff -C > 1$
$ \iff C < -1$

On en déduit que la fonction y est bien définie sur $]1, +\infty$ lorsque $C \geq -1$.

Synthèse : supposons que la fonction y soit définie sur $]1, +\infty[$ par $y(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 + C}$ avec $C \geq 1$.

La fonction y ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$, elle est dérivable et $y'(x) = \dfrac{1}{x(x^2 + C)} - \dfrac{2x\ln(x)}{(x^2 + C)^2}$

D'où $\ln(x)y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} + 2xy^2(x) = \dfrac{\ln(x)}{x(x^2 + C)} - \dfrac{2x\ln^2(x)}{(x^2 + C)^2} - \dfrac{\ln(x)}{x(x^2 + C)} + \dfrac{2x\ln^2(x)}{(x^2 + C)^2} = 0$

y est bien solution du problème.

Conclusion :

Les solutions du problème sont les fonctions y définies sur $]1, +\infty[$ par $y(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 + C}$ avec $C \in [1, +\infty[$.

Exercice 23 :

Analyse : supposons y solution du problème.

On a trouvé la forme de $y(x)$: il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]1, +\infty[\quad y(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 + C}$.

Il reste à analyser les conditions sur C pour que y soit bien définie.

Pour cela, le dénominateur $x^2 + C$ ne doit pas s'annuler sur $]1, +\infty[$.

Si $C > 0$, alors $\forall x \in]1, +\infty[\quad x^2 + C > 0$.

Si $C < 0$, alors $x^2 + C$ admet deux valeurs d'annulation sur $\mathbb{R}$: $x_1 = -\sqrt{-C}$ et $x_2 = \sqrt{-C}$.

Il est évident que $x_1 \notin]1, +\infty[$.

On a : $x_2 \in]1, +\infty[\iff -C > 1$
$ \iff C < -1$

On en déduit que la fonction y est bien définie sur $]1, +\infty$ lorsque $C \geq -1$.

Synthèse : supposons que la fonction y soit définie sur $]1, +\infty[$ par $y(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 + C}$ avec $C \geq 1$.

La fonction y ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$, elle est dérivable et $y'(x) = \dfrac{1}{x(x^2 + C)} - \dfrac{2x\ln(x)}{(x^2 + C)^2}$

D'où $\ln(x)y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} + 2xy^2(x) = \dfrac{\ln(x)}{x(x^2 + C)} - \dfrac{2x\ln^2(x)}{(x^2 + C)^2} - \dfrac{\ln(x)}{x(x^2 + C)} + \dfrac{2x\ln^2(x)}{(x^2 + C)^2} = 0$

y est bien solution du problème.

Conclusion :

Les solutions du problème sont les fonctions y définies sur $]1, +\infty[$ par $y(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 + C}$ avec $C \in [1, +\infty[$.