Mathématiques : TD 7

Calculs d'intégrales et de primitives

Exercice 1 :
Déterminer directement sans aucun calcul d'intégrale une primitive des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto xe^{-3x^2}$ sur $\mathbb{R}$ b) $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^5(x)}$ sur $]1,+\infty[$ c) $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ d) $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$ sur $]-1,+\infty[$

e) $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$ sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$ f) $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]0,1[$ g) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}^2(x)}$ sur $\mathbb{R}$ h) $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^5}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 :
Calculer :

$$I_1 = \int_0^1 te^{t^2}\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_1^e \frac{\ln^3(t)}{t}\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \tan^2(t)\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{it+1}$$

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} \sin^6(t)\cos(t)\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_0^{\pi/2} \sin^6(t)\cos^3(t)\mathrm{d}t \qquad I_7 = \int_1^{12} \sqrt{4+5x}\mathrm{d}x \qquad I_8 = \int_3^4 \frac{dx}{(x-2)^3}$$

$I_9 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(2x+1)}$ on pourra commencer par déterminer a et b tel que $\dfrac{1}{x(2x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{2x+1}$

Exercice 3 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3(x)$.
a) Déterminer une primitive de f à l'aide d'une linéarisation.
b) Déterminer une primitive de f en remarquant que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (1-\sin^2(x))\cos(x)$.

Exercice 4 :
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x)\sin(3x)$.

Exercice 5 :
Déterminer les primitives (sur des intervalles à préciser) des fonctions f définies de la manière suivante (on précisera le domaine de définition de f) :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x+3}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+4}$

Exercice 6 :
Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} \qquad I_2 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+x} \qquad I_3 = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x-5} \qquad I_4 = \int_{1/2}^{3/4} \frac{\mathrm{d}x}{16x^2-16x+7}$$

$$I_5 = \int_1^5 \frac{3\mathrm{d}x}{x^2-4x+7} \qquad J_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} \qquad J_2 = \int_{-1/8}^{1/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-2x^2}} \qquad J_3 = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}}$$

Exercice 7 :
Calculer à l'aide d'intégrations par parties les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{1/2} \arcsin x\mathrm{d}x\,, \qquad I_2 = \int_1^x \sin(\ln t)\mathrm{d}t \ \ (\ x \text{ est un réel strictement positif}), \qquad I_3 = \int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_0^1 2x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x\,, \qquad I_5 = \int_a^b (x-a)^{15}(b-x)\mathrm{d}x\,, \qquad I_6 = \int_0^\pi \sinh(t)\sin(t)\mathrm{d}t\,, \qquad I_7 = \int_{-2}^0 (t^2-3t)e^{-2t}\mathrm{d}t$$

Exercice 8 :
Déterminer (en intégrant par parties) la primitive de $x \mapsto (x \ln x)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule au point 1.

Déterminer (en intégrant par parties) la primitive de $x \mapsto x \sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule au point 0.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes en intégrant par parties :

- $x \mapsto \arctan x$
- $x \mapsto (x+1)\mathrm{ch}\ (x)$
- $x \mapsto \ln(1+x^2)$
- $x \mapsto \cos(\ln x)$

Exercice 9 :
Soit $I = \displaystyle\int_0^\pi e^{-2x}\cos(3x)\mathrm{d}x$.

a) Calculer I en utilisant l'exponentielle complexe.

b) Calculer I à l'aide de deux intégrations par parties successives.

Exercice 10 :
Calculer à l'aide d'un changement de variable :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \text{ (poser } u = \sqrt{t}), \quad I_2 = \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t + t(\ln t)^2} \text{ (poser } x = \ln(t)), \quad I_3 = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t}\mathrm{d}t \text{ (poser } x = \cos t)$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + 2t} \text{ (poser } u = \sqrt{t}) \qquad I_5 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} \text{ (poser } t = \tan\frac{x}{2})$$

$$I_6 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}} \text{ (poser } x = \tan(t)) \qquad I_7 = \int_0^{3\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x}{2 + \sin^2(x)} \text{ (poser } t = \sin(x))$$

$$I_8 = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \text{ (poser } x = \cos(u)) \qquad I_9 = \int_1^4 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \text{ (poser } t = \sqrt{x})$$

Exercice 11 :
Déterminer une primitive des fonctions suivantes en commençant par y effectuer un changement de variables :

a) $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ en posant $t = e^x$

b) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $t = \sqrt{1+x}$

c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ en posant $x = \sin(t)$

d) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ en posant $t = \sqrt{e^x - 1}$

Exercice 12 :
On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $I = J$ par changement de variables.

b) Que vaut $I + J$? En déduire I et J.

c) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2} + t}$.

Exercice 13 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \mathrm{d}x$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Établir une relation liant I_n et I_{n+1}.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

d) En déduire la limite de I_n.

Exercice 14 :
Soient n et p deux entiers naturels, on pose $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p \mathrm{d}x$.

a) Calculer $I_{N,0}$.

b) Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$.

c) En déduire la valeur de $I_{n,p}$.

d) Déterminer la valeur de $J_{q,r} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2q+1}(\theta)\cos^{2r+1}(\theta)\mathrm{d}\theta$.

Exercice 15 : ***Intégrale de Wallis (très classique)***

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) A l'aide d'une intégration par partie, établir une relation de récurrence liant I_{n+2} et I_n.

c) Démontrer que :

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 16 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit T un réel strictement positif.

Montrer que f est T-périodique si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Exercice 17 :

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées :

a) $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$ b) $x \mapsto \displaystyle\int_{\sin(x)}^{2x+1} e^{t^2}\mathrm{d}t$

Exercice 18 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont dérivables et exprimer leur dérivée :

a) $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$ b) $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x)\mathrm{d}t$ c) $g(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x-t)\cos(t)dt$

Equations différentielles

Exercice 19 :

Résoudre sur I l'équation différentielle :

a)	$2xy' - 3y = \sqrt{x}$	$(I =]0, +\infty[)$	b)	$\sin(x)y' + \cos(x)y = \sin^2(x)$	$(I =]-\pi, 0[)$
c)	$y' + 2ty = e^{t-t^2}$	$(I = \mathbb{R})$	d)	$y' - 2xy = \mathrm{sh}\ x - 2x\mathrm{ch}x$	$(I = \mathbb{R})$
e)	$\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$	$(I =]-1, 1[)$	f)	$xy' - 2y = (x+1)^3$	$(I =]0, +\infty[)$

Exercice 20 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a)	$y' + 2y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$	b)	$y' - 3y = e^x\sin(x)$	c)	$y' + y = 3e^{-x}$
d)	$y' - y = \mathrm{sh}(x)$	e)	$y' - 4y = 2 + \cos(2x) - 3e^{4x}$	f)	$y' + 4y = \cos(x) - \sin(x)$

Exercice 21 : ***Problème de Cauchy***

a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' - y\tan x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $y(0) = 1$

b) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$ sur $]-1, +\infty[$ qui vérifient $y(1) = 1$ *(on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_P(x) = \alpha x + \beta$)*

c) Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' + \frac{1}{2}y = \sqrt{x}\ln(x)$ avec la condition initiale $y(1) = 1$.

Exercice 22 :

Soient a et b deux fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$.

a) Montrer que si f est solution de l'équation différentielle (E), alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x+T)$ est aussi solution.

b) Montrer qu'une solution f de l'équation différentielle (E) est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$.

Exercice 23 :
Déterminer l'ensemble des fonctions y qui ne s'annulent pas sur $]1,+\infty[$ et qui vérifient l'équation différentielle :

$$(\ln x)y' - \frac{1}{x}y + 2xy^2 = 0$$

Indication : on posera $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$.

Exercice 24 : ***Exemples d'équations différentielles non linéaires***
a) Résoudre $y'(x) = e^{x+y(x)}$ b) Résoudre $y' = 1 + y^2$ c) Résoudre $x + y(x)y'(x) = 0$

Exercice 25 :
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

Exercice 26 :
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

a) $y'' - y = \mathrm{sh}(x)$
b) $y'' + y' + 2y = e^{2x} + 3e^{-x}$
c) $y'' - 3y' + y = \sin x + \cos x$
d) $y'' + y' - 2y = 8\cos(2x) + e^{3x}$
e) $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{ch}(x)$
f) $y'' + 4y = \sin(2x)$
g) $9y'' - 6y' + y = e^{x/3}$
h) $y'' + 2y' + 5y = e^x \sin(x)$

Exercice 27 : ***Problème de Cauchy***
Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions initiales données :

a) $y'' + 9y = e^{2x}$ $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$
b) $y'' + y' - 2y = \sin(10x)$ $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$
c) $4y'' + 4y' + y = e^{-x/2}$ $\quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$
d) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ $\quad y(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 0$
e) $y'' + y' + y = 0$ $\quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$
f) $y'' + \omega^2 y = \cos(\lambda x)$ $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$ où ω et λ sont des réels strictement positifs distincts

Exercice 28 :
a) Montrer que l'équation différentielle $2y'' - 3y' + y = xe^x$ possède une solution de la forme :

$$x \mapsto (ax^2 + bx)e^x \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

b) En déduire toutes les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y'' - 3y' + y = xe^x$.

Exercice 29 : ***Changement de variables***
1. *Explication du procédé :*
On souhaite déterminer les solutions de l'équation différentielle $x^2y'' + xy' - y = x^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

Pour ce faire procéder par étapes :

a) On pose : $\forall t \in \mathbb{R} \quad z(t) = y(e^t)$. Déterminer une équation différentielle linéaire dont z est solution.

b) Résoudre l'équation trouvée en a).

c) Conclure.

2. *Autres exemples :*

a) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation $xy'' - y' - x^3y = 0$ en effectuant le changement de variable $t = x^2$.

b) Résoudre l'équation $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$ en effectuant le changement de variable $t = \arctan x$.

Exercice 30 : ***Changement de fonctions***
1) On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(E) \quad x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$ en effectuant le changement de fonctions $z : x \mapsto x^2y(x)$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + e^x)y'' + y' - e^xy = 0$ en introduisant la fonction $z = y' + y$.

Exercice 31 :
Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2f(-x) + x$
Indication : on montrera qu'une telle fonction est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 à déterminer