I) SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES HOMOGÈNES D'ORDRE 2

1. **Énoncé :**

On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$. de nombres réels.
On suppose qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $a\neq 0$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad au_{n+2}+bu_{n+1}+uu_n=0$$

En divisant par a, on obtient la relation : $u_{n+2}=-\dfrac{b}{a}u_{n+1}-\dfrac{c}{a}u_n$.

On a donc : $u_{n+2}=Au_{n+1}+Bu_n$ avec $A=-\dfrac{b}{a}$ et $B=-\dfrac{c}{a}$.

L'énoncé suivant donne l'expression du terme général u_n en fonction de n.

Soient a, b deux nombres réels, b non nul, et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie à partir des deux premiers termes u_0, u_1 et la relation de récurrence (linéaire homogène d'ordre 2)

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$$

On note (E) : $r^2-ar-b=0$ l'équation caractéristique associée.

L'expression du terme général u_n dépend des solutions de (E).

On distingue trois cas :

- (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2
  Alors il existe $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=C_1r_1^n+C_2r_2^n$$
- (E) admet une solution réelle double r_0
  Alors il existe $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=(C_1+C_2n)r_0^n$$
- (E) admet deux solutions complexes conjuguées r_1 et $\overline{r_1}$ que l'on note sous forme trigonométrique :
$$r_1=Re^{i\theta}\quad\text{et}\quad r_2=Re^{-i\theta}$$
  Alors il existe $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=C_1R^n\cos(n\theta)+C_2R^n\sin(n\theta)$$

2. **Démonstration :**

L'équation caractéristique admet deux solutions r_1 et r_2 (éventuellement $r_1=r_2$ dans le cas où $\Delta=0$ ou r_1 et r_2 sont complexes non réels dans le cas où $\Delta<0$).

Notons que r_1 et r_2 ne sont pas nuls (car $b\neq 0$).

Posons $\lambda_n=\dfrac{u_n}{r_1^n}$ (de sorte que $u_n=\lambda_n r_1^n$) et $v_n=\lambda_{n+1}-\lambda_n$.

Montrons que v est suite géométrique de raison $q=\dfrac{r_2}{r_1}$:

Comme $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$, on obtient (après simplification par r_1^n) $r_1^2\lambda_{n+2}=ar_1\lambda_{n+1}+b\lambda_n$

Or $ar_1=r_1^2-b$ (car r_1 est solution de l'équation caractéristique).

D'où $r_1^2\lambda_{n+2}=r_1^2\lambda_{n+1}-b(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$,

c'est-à-dire $r_1^2v_{n+1}=-bv_n$.

Comme $b=-r_1r_2$ (d'après les relations entre racines et coefficients d'une équation du second degré), on obtient ainsi que v est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{r_2}{r_1}$

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=q^nv_0$.

Supposons que (E) ait deux racines réelles distinctes :

Déterminons maintenant l'expression de λ_n :

$$\lambda_n=\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)}_{=v_k}+\lambda_0=v_0\sum_{k=0}^{n-1}q^k+\lambda_0=v_0\times\frac{q^n-1}{q-1}+\lambda_0$$

Notons $C_1=\lambda_0-\dfrac{v_0}{q-1}$ et $C_2=\dfrac{v_0}{q-1}$

On obtient alors : $\lambda_n = C_1 + C_2 \dfrac{r_2^n}{r_1^n}$

Puis : $u_n = \lambda_n r_1^n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$

Supposons que (E) ait une racine double r_0 :

On reprend les notations précédentes en remplaçant r_1 et r_2 par r_0.
v est une suite géométrique de raison 1, donc elle est constante égale à son premier terme v_0.
La suite λ est donc une suite arithmétique de raison v_0, d'où $\lambda_n = \lambda_0 + nv_0$.
En notant $C_1 = \lambda_0$ et $C_2 = v_0$, on obtient $u_n = \lambda_n r_0^n = (C_1 + C_2 n) r_0^n$.

Supposons que (E) ait deux racines complexes non réelles :

Comme dans le cas où les racines sont réelles et distinctes, on obtient qu'il existe A, $B \in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n = ((A+B)\cos(n\theta) + i(A-B)\sin(n\theta))R^n$

Or $u_0 = A + B \in \mathbb{R}$, ce qui donne $\mathrm{Im}(B) = -\mathrm{Im}(A)$.

Et $u_1 = (\mathrm{Re}(A) + \mathrm{Re}(B))\cos(\theta)R + i(A-B)\sin(\theta)R \in \mathbb{R}$, ce qui donne $A - B \in i\mathbb{R}$, donc $\mathrm{Re}(B) = \mathrm{Re}(A)$.

Ainsi, en notant $C_1 = \dfrac{\mathrm{Re}(A)}{2}$ et $C_2 = -\dfrac{\mathrm{Im}(A)}{2}$, on obtient $u_n = (C_1\cos(n\theta) + C_2\sin(n\theta))R^n$.

3. **Preuve algébrique :**

On peut démontrer le résultat beaucoup plus aisément en utilisant des propriétés d'algèbre linéaire.

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

$\mathcal{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}^2$, $u \mapsto (u_0, u_1)$ définit un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{K}^2$.

On en déduit que $\dim(\mathcal{E}) = 2$.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, on vérifie que les deux suites $(r_1^n)_{n \geq 0}$ et $(r_2^n)_{n \geq 0}$ sont deux éléments non colinéaires de $\mathcal{E}$, donc forment une base de $\mathcal{E}$. Ainsi, un élément u de $\mathcal{E}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des deux suites précédentes :

ie il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$

Les autres cas se traitent de la même manière.

II) Théorème de Bolzano-Weierstrass :

$\boxed{\text{Soit } u \text{ une suite réelle bornée. Alors, on peut extraire de } u \text{ une sous-suite convergente}}$

Démonstration :

Soit $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_0 \leq u_n \leq b_0$.
Pour tous réels α et β tels que $a_0 \leq \alpha < \beta \leq b_0$, on note :

$$N(\alpha, \beta) = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha \leq u_n \leq \beta\}$$

On sait que $N(a_0, b_0) = \mathbb{N}$. On pose $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.
Comme $N(a_0, b_0) = N(a_0, c_0) \cup N(c_0, b_0)$, alors au moins l'un des deux ensembles $N(a_0, c_0)$ ou $N(c_0, b_0)$ est infini.
Si $N(a_0, c_0)$ est infini, alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.
Sinon, l'autre ensemble $N(c_0, b_0)$ est infini, et on pose alors $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.
Le segment $[a_1, b_1]$ ainsi construit est tel que $N(a_1, b_1)$ soit infini.

On suppose maintenant $[a_n, b_n]$ construit tel que $N(a_n, b_n)$ soit infini. On note $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
Comme $N(a_n, b_n) = N(a_n, c_n) \cup N(c_n, b_n)$, alors au moins l'un des deux ensembles $N(a_n, c_n)$ ou $N(c_n, b_n)$ est infini.
Si $N(a_n, c_n)$ est infini, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
Sinon, l'autre ensemble $N(c_n, b_n)$ est infini, et on pose alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

On a ainsi construit, par récurrence, une suite $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de segments telle que :

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n, b_n]$ est $\dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes.
Par conséquent, elles convergent vers une même limite l.
Reste à montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
On pose $\varphi(0) = 0$.
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $\varphi(n)$ égal à un indice strictement supérieur à $\varphi(n-1)$ qui appartienne à l'ensemble $N(a_n, b_n)$ (il en existe nécessairement puisque $N(a_n, b_n)$ est infini).
La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et vérifie : $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$.
Donc d'après le théorème de convergence par encadrement, la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Soit z une suite complexe bornée. Alors, on peut extraire de z une sous-suite convergente

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

z est bornée, donc les suites réelles x et y sont bornées.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (pour les suites réelles bornées), il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ soit convergente.

La suite réelle $(y_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est bornée.

Donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (pour les suites réelles bornées) il existe donc $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(y_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 0}$ soit convergente.

$(x_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 0}$, étant une suite extraite de $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ (suite convergente), est une suite convergente.

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{\varphi(\psi(n))} = x_{\varphi(\psi(n))} + i y_{\varphi(\psi(n))}$: $(z_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 0}$ **est une suite convergente**.
