mathématiques MPSI : semaine 9

Programme de colle pour la semaine du 27 novembre

1. **Généralités sur les suites**

   (a) **Suites réelles :**
   Définitions : suites majorées, minorées, monotones, stationnaires ...

   On a revu en TD les méthodes pour étudier la monotonie d'une suite réelle.

   (b) **Suites complexes :**
   Brève extension des définitions.

   (c) **Suites particulières :**
   Suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique.
   Suite récurrente linéaire d'ordre 2.

2. **Limite d'une suite réelle**

   Définition : convergence. Unicité de la limite.
   Définition : divergence, limite infinie d'une suite.
   Toute suite convergente est bornée.
   Toute suite convergeant vers une limite $l > 0$ est minorée à partir d'un certain rang par $\frac{l}{2}$. Corollaire.

   Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, quotient. Composition des limites.

   Limites et inégalités.
   Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.

   Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.

   Suites extraites. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.
   Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l, alors (u_n) tend vers l.

   Théorème de Bolzano-Weierstrass.

   Comportement limite de $u_n = q^n$ en fonction de q.

   Méthodes pour l'étude des suites définies par une relation de récurrence simple $u_{n+1} = f(u_n)$: recherche d'intervalles stables par f, utilisation de la croissance éventuelle de f, étude du signe de $f(x) - x$.
   Si (u_n) converge vers un élément l en lequel f est continue, alors $f(l) = l$.
   Étude d'un exemple d'une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante.

   Exemples d'étude de suites définies implicitement.

QUESTIONS DE COURS

La colle pourra débuter par une ou deux démonstrations de cours :

— Toute suite convergente est bornée.

— La somme de deux suites convergentes converge vers la somme des limites.

— Le produit de deux suites convergentes converge vers le produit des limites.

— Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ avec $l > 0$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

— Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.

— Deux suites réelles adjacentes convergent vers la même limite.

— Démontrer :
- si $q > 1$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (sans utiliser la fonction exp)
- si $q \in]-1, 1[$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- si $q < -1$, alors q^n n'admet pas de limite