1. **Théorème des valeurs intermédiaire :**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$.
Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration : on se place dans le cas où $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.
On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ par récurrence.
On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$.
Ensuite, pour tout entier naturel n, en notant $w_n = \frac{u_n+v_n}{2}$, on pose

$$u_{n+1} = \begin{cases} w_n & \text{si } f(w_n) \leq 0 \\ u_n & \text{sinon} \end{cases} \qquad v_{n+1} = \begin{cases} v_n & \text{si } f(w_n) \leq 0 \\ w_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Les suites sont bien définies, car pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, le milieu $\frac{x+y}{2}$ de x et de y est encore un élément de $[a,b]$.
On vérifie alors par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \leq v_n$, $f(u_n) \leq 0$ et $f(v_n) \geq 0$.
De plus, pour tout entier n, on a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \begin{cases} v_n - w_n & \text{si } f(w_n) \leq 0 \\ w_n - u_n & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{donc (dans les deux cas) } v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

Par conséquent, $v_n - u_n = \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ (suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$), et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.
De la définition des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$, on a également que :

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} \frac{v_n - u_n}{2} & \text{si } f(w_n) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$: $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante.
On justifie de même que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
Il s'ensuit que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
On note c leur limite commune.
D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$ et $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$.
En passant à la limite dans l'inégalité $f(u_n)f(v_n) \leq 0$, on obtient $f(c)^2 \leq 0$, ce qui permet de déduire que $f(c) = 0$.

2. **Continuité sur un segment :**

Théorème : une fonction continue sur un segment est bornée et ses bornes sont atteintes.

Démonstration : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Supposons par l'absurde que f ne soit pas majorée.
Alors, pour tout entier naturel n, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) \geq n$.
La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge vers un réel c.
Comme $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, on en déduit que $c \in [a,b]$.
f étant continue, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$
D'autre part, $f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n)$ et comme $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. **Contradiction.**
Ainsi, f est majorée et admet donc une borne supérieure M.

Pour tout entier naturel n non nul, il existe $y_n \in [a,b]$ tel que $M - \frac{1}{n} \leq f(y_n) \leq M$.
On en déduit que $f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$ (théorème d'encadrement).
La suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(y_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ qui converge vers un réel d.
Comme $a \leq y_{\varphi(n)} \leq b$, on en déduit que $d \in [a,b]$.

f étant continue, $f(y_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(d)$
Et $(f(y_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ est une suite extraite de $(f(y_n))_{n\geq 1}$, donc converge aussi vers M.
L'unicité de la limite donne $M = f(d)$.
Ainsi, M est un maximum de f.

On montre de même que f admet un minimum m.

On sait que $f([a,b])$ est un intervalle inclus dans $[m,M]$ et que m et M sont des éléments de $f([a,b])$.
On en déduit que $f([a,b]) = [m,M]$.

3. **Continuité et injectivité :**

Toute fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.
Supposons par l'absurde que f ne soit pas strictement monotone.

f n'est strictement croissante : il existe $(a_1,a_2) \in I^2$ tel que $a_1 < a_2$ et $f(a_1) \geq f(a_2)$.
f n'est pas strictement décroissante : il existe $(b_1,b_2) \in I^2$ tel que $b_1 < b_2$ et $f(b_1) \leq f(b_2)$.

On définit alors la fonction g sur $[0,1]$ par

$$g(t) = f(ta_1 + (1-t)b_1) - f(ta_2 + (1-t)b_2)$$

Notons que pour $t \in [0,1]$, $ta_i + (1-t)b_i$ est un nombre réel compris entre a_i et b_i, donc appartient à I, ce qui justifie que g est bien définie.
g est continue sur $[0,1]$.
$g(0) = f(b_1) - f(b_2) \leq 0$ et $g(1) = f(a_1) - f(a_2) \geq 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 0$.
On obtient : $f(t_0a_1 + (1-t_0)b_1) = f(t_0a_2 + (1-t_0)b_2)$
Comme f est injective, on a donc : $t_0a_1 + (1-t_0)b_1 = t_0a_2 + (1-t_0)b_2$
Ce qui donne : $(1-t_0)(b_1 - b_2) = t_0(a_2 - a_1)$.
Or $t_0(a_2 - a_1) \geq 0$ et $(1-t_0)(b_1 - b_2) \leq 0$.
Ces deux termes de signe opposé et égaux, sont donc nuls : $t_0(a_2 - a_1) = 0$ et $(1-t_0)(b_1 - b_2) = 0$.
$a_2 - a_1$ et $b_2 - b_1$ étant tous deux non nuls, on en déduit que $t_0 = 0$ et $t_0 = 1$. **Contradiction**.

4. **Théorème de la bijection :**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. f réalise une bijection de I vers $J = f(I)$ et $f^{-1} : J \to I$ est continue

Démonstration : on suppose f strictement croissante (si f est strictement décroissante, on étudie $-f$).
Soit $b \in J$. Démontrons que f^{-1} est continue en b, c'est-à-dire que $f^{-1}(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} f^{-1}(b)$.

Posons $a = f^{-1}(y)$.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a - \varepsilon \in I$ et $a + \varepsilon \in I$ (on se place dans le cas où a n'est pas une extrémité de I, la preuve qui suit d'adapte aisément lorsque a est une extrémité de I).
On note $y_1 = f(a-\varepsilon)$ et $y_2 = f(a+\varepsilon)$.
f est strictement croissante, donc $f(a-\varepsilon) < f(a) < f(a+\varepsilon)$, ce qui donne $y_1 < b < y_2$.
f^{-1} étant strictement croissante, on a alors $\forall y \in [y_1,y_2]$, $f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_2)$,
donc $\forall y \in [y_1,y_2]$, $a - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq a + \varepsilon$ ou encore $|f^{-1}(y) - a| \leq \varepsilon$.
On pose r =min$(b - y_1, y_2 - b)$ et on a alors : $\forall y \in [b-r, b+r]$, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| \leq \varepsilon$
et ainsi $f^{-1}(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} f^{-1}(b)$.

5. **Existence de primitives :**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I. Alors f possède des primitives. Plus précisément, si a est un élément fixé de I, alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration : Soit $x \in I$.
Montrons que F est dérivable au point x et $F'(x) = f(x)$, c'est-à-dire $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)$.

- **Limite à droite :** soit h un réel strictement positif tel que $x+h \in I$.

$F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t + \int_x^a f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$ (relation de Chasles)

f est continue sur le segment $[x,x+h]$, don admet un minimum m et un maximum M.
Il existe $c_h \in [x,x+h]$ tel que $m = f(c_h)$ et il existe $c'_h \in [x,x+h]$ tel que $M = f(c'_h)$.
On a : $\forall t \in [x,x+h]$, $m \leq f(t) \leq M$.
Par croissance de l'intégrale, on obtient : $\displaystyle\int_x^{x+h} m\mathrm{d}t \leq \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_x^{x+h} M\mathrm{d}t$,
ce qui donne : $m \times h \leq F(x+h) - F(x) \leq M \times h$.
On multiplie cet encadrement par $\dfrac{1}{h}$ (qui est strictement positif) : $f(c_h) \leq \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(c'_h)$.
Comme $x \leq c_h \leq x+h$, on déduit par le théorème d'encadrement que $c_h \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} x$.
Par continuité de la fonction f, on a alors $f(c_h) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$.
De même, on a $f(c'_h) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$.
Le théorème d'encadrement permet alors de déduire de $f(c_h) \leq \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(c'_h)$ que :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

- **Limite à gauche :** soit h un réel strictement négatif tel que $x+h \in I$ (on note ici que $x+h < x$).

$F(x+h) - F(x) = -\displaystyle\int_{x+h}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ (relation de Chasles)

f est continue sur le segment $[x+h,x]$, don admet un minimum m et un maximum M.
Il existe $c_h \in [x+h,x]$ tel que $m = f(c_h)$ et il existe $c'_h \in [x+h,x]$ tel que $M = f(c'_h)$.
On a : $\forall t \in [x+h,x]$, $m \leq f(t) \leq M$.
Par croissance de l'intégrale, on obtient : $\displaystyle\int_{x+h}^{x} m\mathrm{d}t \leq \int_{x+h}^{x} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{x+h}^{x} M\mathrm{d}t$,
ce qui donne : $-m \times h \leq -(F(x+h) - F(x)) \leq -M \times h$.
On multiplie cet encadrement par $-\dfrac{1}{h}$ (qui est strictement positif) : $f(c_h) \leq \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(c'_h)$.
Le même raisonnement que précédemment permet de déduire que :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$