1. **Propriétés du produit matriciel :**

On rappelle que deux matrices sont égales si et seulement si elles sont de même type et ont les mêmes coefficients.

(a) **Associativité du produit matriciel :**

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

$AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, puis $(AB)C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, et $BC \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ donc $A(BC) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.

Ainsi, $(AB)C$ et $A(BC)$ **sont de même type.**

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$, $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q\\1\leq j\leq r}}$, $AB = (d_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}}$,

$(AB)C = (e_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq r}}$, $BC = (f_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq r}}$, et $A(BC) = (g_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq r}}$

$$\forall (i,l) \in [1,n] \times [1,r] \qquad e_{il} = \sum_{k=1}^{q} d_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

$$\forall (i,l) \in [1,n] \times [1,r] \qquad g_{il} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}f_{jl} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

L'ordre des sommations n'a pas d'importance : $\forall (i,l) \in [1,n] \times [1,r] \qquad e_{il} = g_{il}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } (AB)C = A(BC)}$

(b) **Le produit matriciel est linéaire à gauche :**

Soient $(A, A') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
Les matrices $(\alpha A + \beta A')B$ et $\alpha AB + \beta A'B$ sont de même type (n lignes et q colonnes).
On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, $A' = (a'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$.

Le terme d'indice (i,j) de la matrice $(\alpha A + \beta A')B$ est égal à :

$$\sum_{k=1}^{p} (\alpha a_{ik} + \beta a'_{ik})b_{kj}$$

Le terme d'indice (i,j) de la matrice $\alpha AB + \beta A'B$ est égal à :

$$\alpha \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \beta \sum_{k=1}^{p} a'_{ik}b_{kj}$$

Il découle des règles de calculs dans $\mathbb{K}$ que ces deux termes sont égaux.

$\boxed{\text{D'où } (\alpha A + \beta A')B = \alpha AB + \beta A'B}$

(c) **Transposée d'un produit de matrices :**

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, donc $(AB)^T \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, et $B^TA^T \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.

$(AB)^T$ et B^TA^T **sont de même type.**

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$, $AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}}$,

$A^T = (a'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}}$, $B^T = (b'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q\\1\leq j\leq p}}$, $(AB)^T = (c'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q\\1\leq j\leq n}}$ et $B^TA^T = (d_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q\\1\leq j\leq n}}$.

$$\forall (i,j) \in [1,q] \times [1,n] \qquad c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik}a'_{kj} = d_{ij}$$

$\boxed{\text{D'où } (AB)^T = B^TA^T}$

2. **Inversibilité d'une matrice triangulaire**

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire inférieure.

Nous allons transformer A en I_n par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, que nous reporterons au fur et à mesure sur I_n pour obtenir à la fin la matrice A^{-1} (lorsque A est inversible).

• Si $a_{11} = 0$, la première ligne est nulle et donc A n'est pas inversible.

Dans le cas contraire, l'opération $L_1 \longleftarrow \frac{1}{a_{11}} L_1$ transforme le coefficient a_{11} en 1, puis on peut annuler tous les coefficients de A situés en dessous de ce 1 grâce à des opérations élémentaires sur les lignes en l'utilisant comme pivot. Les matrices A et I_n deviennent :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I'_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & \\ \text{x} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \text{x} & & & 1 \end{pmatrix}$$

• On continue. Si $a_{22} = 0$, la deuxième ligne de A' est nulle et donc A' n'est pas inversible, donc A ne l'est pas non plus (les opérations élémentaires sur les lignes préservent l'inversibilité).

Dans le cas contraire, l'opération $L_2 \longleftarrow \frac{1}{a_{22}} L_2$ transforme le coefficient a_{22} en 1, puis on peut annuler tous les coefficients de A' situés en dessous de ce 1 grâce à des opérations élémentaires sur les lignes en l'utilisant comme pivot. Les matrices A' et I'_n deviennent :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & & \\ \text{x} & \frac{1}{a_{22}} & & & \\ \text{x} & \text{x} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \text{x} & \text{x} & & & 1 \end{pmatrix}$$

• Et ainsi de suite. Finalement, si l'un des coefficients diagonaux de A est nul, alors on obtient au cours d'une des étapes de cet algorithme une matrice intermédiaire qui aura une ligne nulle, ce qui permet de déduire que A n'est pas inversible.

Sinon, tous les coefficients diagonaux sont non nuls, et l'algorithme permet d'obtenir I_n par des opérations élémentaires sur les lignes, prouvant que A est inversible. La matrice inverse A^{-1} obtenue est triangulaire inférieure de coefficients diagonaux les inverses de ceux de A.

On a ainsi montré les résultats suivants :

- Une matrice triangulaire inférieure A est inversible si et seulement si ses coeff. diagonaux sont tous non nuls.
- Dans ce cas, A^{-1} est triangulaire inférieure et ses coeff. diagonaux sont les inverses des coeff. diagonaux de A.

Étude des matrices triangulaires supérieures :

Soit A une matrice triangulaire supérieure.

Alors A^T est triangulaire inférieure, donc inversible si et seulement si ses coeff. diagonaux sont tous non nuls.

Or A et A^T ont les mêmes coefficients diagonaux.

Par conséquent, A **est inversible si et seulement si ses coeff. diagonaux sont tous non nuls.**

Dans ce cas, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Or nous venons de voir que $(A^T)^{-1}$ est triangulaire inférieure, donc sa transposée est triangulaire supérieure.

Ainsi, A^{-1} **est triangulaire supérieure.**