Exercice 1 : Équation fonctionnelle

Partie A : méthode 1

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ (où a et b sont deux nombres réels).
   f est continue et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{ax+b+ay+b}{2} = a\frac{x+y}{2} + b = f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)$$

$\boxed{\text{Les fonctions affines sont des éléments de } \mathcal{E}}$

2. (a) En appliquant la relation fonctionnelle aux réels x et $-x$, on obtient $f(0) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.

   Comme $f(0) = 0$, on déduit : $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

   (b) En appliquant la relation fonctionnelle aux réels $2x$ et 0, on obtient $f(x) = \dfrac{f(2x)+f(0)}{2}$.

   $\boxed{\text{Ainsi,} \quad 2f(x) = f(2x)}$

   (c) Soit P_n : « $f\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big) = 0$ »

   $f(1) = 0$ (par hypothèse), P_0 est vraie.

   Supposons P_n vraie pour un entier $n \geq 0$.
   D'après la question 2b appliquée à $x = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, $2f\Big(\dfrac{1}{2^{n+1}}\Big) = f\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)$, d'où $f\Big(\dfrac{1}{2^{n+1}}\Big) = 0$

   $\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence simple, } \forall n \in \mathbb{N} \quad f\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big) = 0}$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Soit P_p : « $f\Big(\dfrac{p}{2^n}\Big) = 0$ »
   $f(0) = 0$: P_0 est vraie.

   Supposons P_p vraie pour un entier $p \geq 0$.

   En appliquant la relation fonctionnelle aux réels $x = \dfrac{p}{2^{n-1}}$ et $y = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, on obtient :

$$f\Big(\frac{p+1}{2^n}\Big) = \frac{1}{2}f\Big(\frac{p}{2^{n-1}}\Big) + \frac{1}{2}f\Big(\frac{1}{2^{n-1}}\Big)$$

   D'après la question 2b, $\dfrac{1}{2}f(t) = f\Big(\dfrac{t}{2}\Big)$.
   On trouve ainsi : $f\Big(\dfrac{p+1}{2^n}\Big) = f\Big(\dfrac{p}{2^n}\Big) + f\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big) = 0$ en utilisant P_p et le résultat de la question 2c.

   $\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence simple, } \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad f\Big(\dfrac{p}{2^n}\Big) = 0}$

   (e) On rappelle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $t - 1 \leq \lfloor t \rfloor \leq t$.
   On a : $2^n x - 1 \lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x$, d'où $x - \dfrac{1}{2^n} \leq u_n \leq x$.
   u_n étant encadré par deux termes de limite x, d'après le théorème de convergence par encadrement, $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers x

   (f) D'après la question 2d, $f(u_n) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
   D'autre part, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$ et f est continue, donc $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$
   L'unicité de la limite permet de déduire que $f(x) = 0$ (résultat valable pour $x \in \mathbb{R}_+$).
   f étant impaire, la relation s'étend aux réels négatifs.

   $\boxed{f \text{ est donc la fonction nulle}}$

3. (a) g est continue et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
   $\dfrac{g(x)+g(y)}{2} = \dfrac{f(x)+f(y)}{2} - \dfrac{ax+b+ay+b}{2} = f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) - \Big(a\,\dfrac{x+y}{2} + b\Big) = g\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)$
   g est un élément de $\mathcal{E}$

(b) Il suffit de remarquer que $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$.
D'après la question 2, g est donc la fonction nulle.

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b}$

Partie B : méthode 2

1. $\displaystyle\int_0^1 f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\mathrm{d}y = \Big[2F\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big]_0^1 = 2F\Big(\frac{x+1}{2}\Big) - 2F\Big(\frac{x}{2}\Big)$

   D'autre part, $\displaystyle\int_0^1 f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{f(x)+f(y)}{2}\mathrm{d}y$ *relation fonctionnelle*

   $\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y$ *par linéarité*

   $\displaystyle = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\Big[F(y)\Big]_0^1$

   On rappelle l'intégrale d'une fonction constante : $\displaystyle\int_a^b m\mathrm{d}t = m(b-a)$

   $\displaystyle = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}F(1)$

   $\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 4F\Big(\frac{x+1}{2}\Big) - 4F\Big(\frac{x}{2}\Big) - F(1)}$

   Comme F est dérivable, les théorèmes opératoires permettent de déduire que f est dérivable.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   En dérivant la relation $\forall y \in \mathbb{R} \quad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ par rapport à y, on obtient :
   $\forall y \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2}f'\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f'(y)}{2}$
   En particulier, $\frac{1}{2}f'\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{f'(0)}{2}$
   En appliquant cette dernière relation au réel $2x$, on a ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f'(0)$

3. En posant $a = f'(0)$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a$, puis $f(x) = ax + b$ avec $b = f(0)$.

Exercice 2

1. (a) La relation $ab = n^2$ donne : $ukb = u^2v^2$ puis $kb = uv^2$ (après simplification par u qui est non nul).

   k et v sont les quotients respectifs de a et n par leur PGCD.
   D'après la caractérisation du PGCD, k et v sont premiers entre eux.
   k est donc premier avec v^2 et divise le produit uv^2, par conséquent k divise u d'après le théorème de Gauss.

   u est un diviseur de a, et a est premier avec b, donc u est premier avec b (tout diviseur commun de u et b est un diviseur commun de a et b).
   De plus, u divise le produit kb.
   Donc u divise k d'après le théorème de Gauss.

   (b) u et k sont deux entiers positifs associés, donc $u = k$.
   Ce qui donne : $a = u^2$.

   De la relation $ab = n^2$, on obtient : $u^2b = u^2v^2$, puis $b = v^2$.

   Soit $d = u \wedge v$.
   d divise u et v, donc d divise $a = u^2$ et $b = v^2$.
   Par conséquent, d divise $a \wedge b = 1$, donc $d = 1$. Ainsi, $u \wedge v = 1$.

2. (a) Notons $d = x \wedge z$.
   d divise x et z, donc d divise la combinaison linéaire $z^2 - x^2 = y^2$.
   d divise ainsi x et y^2.
   Comme x et y sont premiers entre eux, x et y^2 sont également premiers entre eux.
   Par conséquent, $d = 1$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } x \wedge z = 1}$

   (b) Soient a et b deux entiers impairs. On note $a = 2k+1$ et $b = 2k'+1$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.
   $a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1$, $\boxed{\text{d'où } a^2 + b^2 \equiv 2 \ [4]}$

(c) x et y sont premiers entre eux, donc x et y ne peuvent pas être tous les deux pairs.
Si x et y étaient tous les deux impairs, alors on aurait : $z^2 \equiv 2\ [4]$
Ce qui est impossible, car le carré d'un entier est congru à 0 ou à 1 modulo 4 (suivant qu'il est pair ou impair).

$\boxed{\text{Ainsi, } x \text{ et } y \text{ sont de parités différentes}}$

Raisonnons modulo 2 pour déduire la parité de z.
Supposons par exemple que x soit pair et y soit impair.
Alors $x \equiv 0\ [2]$ et $y \equiv 1\ [2]$, puis $x^2 + y^2 \equiv 1\ [2]$, c'est-à-dire $z^2 \equiv 1\ [2]$
Ce qui entraîne que $z \equiv 1\ [2]$ (car $z \equiv 0\ [2]$ n'est pas compatible avec $z^2 \equiv 1\ [2]$)

$\boxed{z \text{ est impair}}$

(d) y et z sont deux entiers impairs, donc $z - y$ et $z + y$ sont pairs, ce qui justifie que a **et** b **sont des entiers.**

Notons $d = a \wedge b$.
d divise a et b, donc d divise $z = a + b$ et $y = a - b$.
Puis d divise $z^2 - y^2 = x^2$.
Comme y et x^2 sont premiers entre eux, on en déduit que $d = 1$.

Enfin, $ab = \dfrac{z+y}{2} \times \dfrac{z-y}{2} = \dfrac{z^2 - y^2}{4} = \dfrac{x^2}{4} = n^2$

(e) D'après le résultat préliminaire, il existe deux entiers naturels u et v premiers entre eux tels que $a = u^2$ et $b = v^2$.
On a alors : $y = a - b = u^2 - v^2$, $z = a + b = u^2 + v^2$ et $x = 2n = 2\sqrt{ab} = 2uv$
Il reste à justifier que u et v sont de parités différentes.
Si u et v étaient tous deux impairs, alors y serait pair (différence de deux nombres impairs), ce qui est exclu.
Si u et v étaient tous deux pairs, alors y serait pair également.
Par conséquent, u et v sont nécessairement de parités différentes.

3. (a) $x^2 + y^2 = 4u^2v^2 + (u^2 - v^2)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 = z^2$.
Donc (x, y, z) est un triplet pythagoricien.

(b) Notons $d = y \wedge z$.
d divise $2u^2 = z + y$ et d divise $2v^2 = z - y$.
Or z est impair (somme d'un nombre pair et d'un nombre impair), z n'est pas divisible par 2,
donc d n'est pas divisible par 2.
2 et d sont donc premiers entre eux.
Le théorème de Gauss permet alors de déduire que d divise u^2 et v^2.
Comme u^2 et v^2 sont premiers entre eux, on obtient que $d = 1$.

Le même raisonnement que celui tenu à la question 2a permet d'établir que $x \wedge y = 1$.

4. IL suffit de choisir un couple (u, v) d'entiers premiers entre eux et de parités différentes avec $u > v$, puis d'appliquer les formules données à la question 3 pour obtenir un triplet pythagoricien primitif.
Voici 10 exemples possibles :

u	v	$x = 2uv$	$y = u^2 - v^2$	$z = u^2 + v^2$
4	1	8	15	17
6	1	12	35	37
8	1	16	63	65
10	1	20	99	101
3	2	12	5	13

u	v	$x = 2uv$	$y = u^2 - v^2$	$z = u^2 + v^2$
5	2	20	21	29
7	2	28	45	53
4	3	24	7	25
5	4	40	9	41
6	5	60	11	61