

**1. Généralités sur les polynômes à une indéterminée à coefficients dans  $\mathbb{K}$** 

- (a) Définition. Degré d'un polynôme, coefficient dominant, polynôme unitaire.  
 Degré d'une somme, d'un produit.  
 $(\mathbb{K}[X], +, \times)$  est un anneau intègre.  
 Evaluation d'un polynôme en un point.  
 Composition.
- (b) Divisibilité dans  $\mathbb{K}[X]$  : multiples et diviseurs d'un polynôme, polynômes associés.  
 Division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ .
- (c) Dérivation. Polynôme dérivé. Dérivées successives d'un polynôme.  
 Opérations sur les polynômes dérivés. Formule de Leibniz.  
 Formule de Taylor polynomiale.

**2. Racines d'un polynôme**

Racine d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.

Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont des racines distinctes de  $P$ , alors  $\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$  divise  $P$ .

Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  sont des racines distinctes de  $P$  d'ordre de multiplicité respectivement  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , alors  $\prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$  divise  $P$ .

Le nombre de racines comptées avec leur ordre de multiplicité d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Relations entre racines et coefficients d'un polynôme scindé.

**3. Arithmétique dans  $\mathbb{K}[X]$  :**

PGCD de deux polynômes, algorithme d'Euclide. Relation de Bézout.

Polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Corollaires. Théorème de Gauss.

PPCM de deux polynômes.

PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble.

**4. Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant est scindé sur  $\mathbb{C}$ .**

Le nombre de racines (dans  $\mathbb{C}$ ) comptées avec leur ordre de multiplicité d'un polynôme non nul est égal à son degré.

Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  ont la même multiplicité.

Polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$ . Factorisation de  $X^n - 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ . Décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.

**5. Polynômes interpolateurs de Lagrange associés à un  $(n+1)$ -uplet  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  de nombres deux à deux distincts. Formule d'interpolation de Lagrange.**