Exercice 1 :

1. $(X-1)^n$ est de degré n, et d'après la formule du binôme, $(X-1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$.

   Notons a_k le coefficient de degré k de ce polynôme. On a donc : $a_k = (-1)^{n-k}\dbinom{n}{k}$

   • si n est pair : alors $(-1)^n = 1$, d'où $(-1)^{n-k} = (-1)^k$.

   Par conséquent, $\forall k \in [\![0\,,\,n]\!] \quad a_{n-k} = (-1)^k \dbinom{n}{n-k} = (-1)^{n-k}\dbinom{n}{k} = a_k$.

   $(X-1)^n$ est un polynôme réciproque.

   • si n est impair : le coefficient de degré n vaut 1, et le coefficient de degré 0 vaut -1.
   $(X-1)^n$ n'est pas un polynôme réciproque.

   $\boxed{(X-1)^n \text{ est un polynôme réciproque si et seulement si } n \text{ est pair}}$

   (1.5 pt + 0.25 pt de bonus pour preuve bien structurée)

2. Notons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

   On a : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = z^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} \underset{i=n-k}{=} \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^i = \widehat{P}(z)$. **(1 pt)**

   Supposons P réciproque, alors $\widehat{P} = P$, d'où $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^n P\left(\dfrac{1}{z}\right)$ **(0.25 pt)**

   Supposons $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^n P\left(\dfrac{1}{z}\right)$

   Alors $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \widehat{P}(z) = P(z)$

   Ainsi, le polynôme $P - \widehat{P}$ admet une infinité de racines donc est le polynôme nul : $P = \widehat{P}$. **(0.75 pt)**

   $\boxed{P \text{ est un polynôme réciproque si et seulement si } \forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)}$

3. (a) Soient P_1 et P_2 deux polynômes réciproques de degré respectivement n_1 et n_2.
   Alors P_1P_2 est un polynôme de degré $n_1 + n_2$ qui vérifie :

   $$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad (P_1P_2)(z) = P_1(z) \times P_2(z) = z^{n_1} P_1\left(\frac{1}{z}\right) \times z^{n_2} P_2\left(\frac{1}{z}\right) = z^{n_1+n_2}(P_1P_2)\left(\frac{1}{z}\right)$$

   $\boxed{\text{Donc } P_1P_2 \text{ est un polynôme réciproque}}$ **(1.25 pt)**

   (b) S est un polynôme de degré $n-q$.

   On a $P = QS$, donc $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(\frac{1}{z}) = Q(\frac{1}{z})S(\frac{1}{z})$.

   On multiplie par z^n :

   $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad z^n P(\frac{1}{z}) = z^q Q(\frac{1}{z}) \times z^{n-q} S(\frac{1}{z})$.

   Or P et Q sont des polynômes réciproques, et S est un polynôme de degré $n-q$, donc :
   $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^n P(\frac{1}{z})$, $Q(z) = z^q Q(\frac{1}{z})$ et $\widehat{S}(z) = z^{n-q} S(\frac{1}{z})$.

   On obtient alors : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = Q(z)\widehat{S}(z)$.

   Comme $P = QS$, on a également : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = Q(z)S(z)$.
   On en déduit que : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad Q(z)S(z) = Q(z)\widehat{S}(z)$

   Le polynôme Q admet au plus q racines distinctes.
   Il existe donc une infinité de valeurs de z tels que $Q(z) \neq 0$ et on obtient pour ces valeurs :

   $$S(z) = \widehat{S}(z)$$

   Le polynôme $S - \widehat{S}$ admet donc une infinité de racines : il est nul
   et $\boxed{\text{ainsi } S \text{ est un polynôme réciproque}}$ **(2.5 pts)**

4. P est un polynôme réciproque, donc $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^n P\left(\dfrac{1}{z}\right)$
   Pour $z = -1$, on obtient : $P(-1) = (-1)^n P(-1)$.

Or n est impair, donc $(-1)^n = -1$ et ainsi, $P(-1) = 0$.

$\boxed{P \text{ est donc divisible par } (X+1)}$ et d'après la question 2b, comme $X+1$ est un polynôme réciproque,

$\boxed{\text{le quotient de } P \text{ par } (X+1) \text{ est un polynôme réciproque}}$ **(1.25 pt)**

5. (a) On pose $B = aX^2 + bX + c$.

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad B\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = a\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)^2 + b\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) + c$

D'où, $\quad z^2 B\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = az^4 + bz^3 + (2a+c)z^2 + bz + a$.

Pour $a = 5$, $b = -24$ et $c = 16$, on a donc : $\quad z^2 B\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = A(z)$. **(1.25 pt)**

(b) Les racines de $B = 5X^2 - 24X + 16$ sont 4 et 4/5.

$A(0) \neq 0$, et pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a : $A(z) = 0 \iff B(z + \frac{1}{z}) = 0$

$$\begin{aligned}
&\iff z + \frac{1}{z} = 4 \text{ ou } z + \frac{1}{z} = 4/5\\
&\iff z^2 - 4z + z = 0 \text{ ou } z^2 - \tfrac{4}{5}z + 1 = 0\\
&\iff z = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } z = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } z = \frac{2 + i\sqrt{21}}{5} \text{ ou } z = \frac{2 - i\sqrt{21}}{5}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, les racines de } A \text{ sont } 2 + \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3},\ \dfrac{2 + i\sqrt{21}}{5},\ \dfrac{2 - i\sqrt{21}}{5}}$ **(2.5 pts)**

(c) $\boxed{A = 5\big(X - 2 - \sqrt{3}\big)\big(X - 2 + \sqrt{3}\big)\big(X^2 - \frac{4}{5}X + 1\big)}$ **(0.75 pt)**

6. (a) Soit $\mathcal{P}_n$: $\deg(R_n) = n$, le coefficient dominant de R_n est 1,

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.

Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ vraies pour un entier $n \geq 2$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a : $R_{n+1} = XR_n - R_{n-1}$.
Comme $\deg(XR_n) = n + 1$ et $\deg(R_{n-1}) = n - 1$, les degrés étant distincts, on en déduit que :

$$\deg(R_{n+1}) = \max(\deg(XR_n), \deg(R_{n-1})) = n + 1$$

Le coefficient dominant de R_{n+1} est égal au coefficient dominant de XR_n, donc égal à 1.

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$\boxed{R_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ unitaire (\textit{ie} de coefficient dominant égal à 1)}}$ **(2 pts)**

(b) Soit $\mathcal{P}_n$: $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad R_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

$R_1\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z}$: $\mathcal{P}_1$ est vraie.

$R_2\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + \dfrac{1}{z^2}$, donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ vraies pour un entier $n \geq 2$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
R_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(z + \frac{1}{z}\right) R_n\left(z + \frac{1}{z}\right) - R_n\left(z + \frac{1}{z}\right)\\
&= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) - \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right)\\
&= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}. \quad \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, d'après les principe de récurrence,} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad R_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}}$ **(1.5 pt)**

(c) On pose $z = e^{i\theta}$.

$z + \dfrac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ (d'après les formules d'Euler).

$R_n(2\cos(\theta)) = R_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

$= z^n + \dfrac{1}{z^n}$
$= e^{in\theta} + e^{-in\theta}$
$= 2\cos(n\theta)$ **(1 pt)**

(d) D'après la relation précédente, l'équation $R_n(2\cos(\theta)) = 0$ est équivalente à l'équation $\cos(n\theta) = 0$ avec $n\theta \in [0, n\pi]$.

La fonction cos s'annule exactement n fois sur l'intervalle $[0, n\pi]$, aux points $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } R_n(2\cos(\theta)) = 0 \text{ admet } n \text{ solutions dans } [0,\pi] \text{ : les réels } \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!].}$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \in]0, \pi[$, et la fonction cos est injective sur $]0, \pi[$, les réels $x_k = 2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ sont deux à deux distincts, appartiennent à l'intervalle $]-2, 2[$ et sont des racines de R_n. R_n, étant de degré n, ne possède pas d'autres racines que les réels $(x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$.

$\boxed{\text{Le polynôme } R_n \text{ admet donc } n \text{ racines réelles dans }]-2, 2[}$ **(3 pts)**

(e) Comme $\deg(R_n) = 1$ et R_n est unitaire, on en déduit que $\boxed{R_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}$ **(0.5 pt)**

Cette dernière écriture correspond à la décomposition de R_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

(f) **<u>Existence :</u>**

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2q} a_k X^k$.

Comme P est réciproque, pour tout $k \in [\![0, 2q]\!]$, $a_{2q-k} = a_k$ et on peut alors écrire :

$P = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} a_k (X^k + X^{2q-k}) + a_q X^q$.

$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^q \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} a_k \left(\frac{1}{z^{q-k}} + z^{q-k}\right) + a_q\right] = z^q \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} a_k R_{p-k}\left(z + \frac{1}{z}\right) + a_q\right]$

Le polynôme $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} a_k R_{q-k} + a_q$ vérifie : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^q T(z + \frac{1}{z})$.

$T = a_0 R_q + \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} a_k R_{q-k} + a_q$.

Le polynôme $a_0 R_q$ est de degré q, et le polynôme $\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} a_k R_{q-k} + a_q$ appartient à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$.

Donc $\deg(T) = q$.

<u>Unicité :</u>

Soient T_1 et T_2 deux polynômes vérifiant les conditions requises.
Alors $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad T_1(z + \frac{1}{z}) = T_2(z + \frac{1}{z})$.
Les nombres complexes $z + \frac{1}{z}$, avec $z \in \mathbb{C}^*$, sont donc des racines de $T_1 - T_2$.
Comme la fonction $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ prend une infinité de valeurs différentes (elle est même surjective), le polynôme $T_1 - T_2$ admet donc une infinité de racines.
Par conséquent, le polynôme $T_1 - T_2$ est le polynôme nul. Ainsi, $T_1 = T_2$.
