## Exercice 1 : étude d'une fonction

1. Méthode 1 :

   $\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{=} 2x - \dfrac{(2x)^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$, d'où $\dfrac{\ln(1+2x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 2 - 2x + \mathrm{o}(x)$

   On en déduit que $\dfrac{\ln(1+2x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$. $f$ est continue en 0.

   $f$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0, $f$ est donc dérivable en 0 et $f'(0) = -2$.

2. Méthode 2 :

   (a) $\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$, donc $\dfrac{\ln(1+2x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 2$.

   On en déduit que $\dfrac{\ln(1+2x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$

   $f$ est continue en 0.

   (b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x)}{x^2}$

   *On effectue un petit DL du numérateur en vue d'obtenir un équivalent*

   $$\begin{aligned}\text{Or } \frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x) &\underset{x\to 0}{=} 2x\Big(1 - 2x + \mathrm{o}(x)\Big) - \Big(2x - 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)\Big) \\ &\underset{x\to 0}{=} -2x^2 + \mathrm{o}(x^2) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} -2x^2\end{aligned}$$

   On en déduit que $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2$

   D'après le théorème de la limite de la dérivée, $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = -2$.

   On a alors $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$. $f'$ est donc continue en 0.

   $f$ est de classe $C^1$.

   Comparaison des deux méthodes :

   Un développement limité d'ordre 1 de $\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ permet

   - de déduire le comportement limite de $\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers 0 *interprétation de $c_0$*
     *on vérifie ainsi que $f$ est continue en 0*
   - de déduire que $f$ est dérivable en 0 (lorsqu'elle a été prolongée par continuité en 0) *interprétation de $c_1$*

   Par contre, le développement limité d'ordre 1 n'indique pas si la dérivée $f'$ est continue en 0

   Pour étudier la dérivabilité en 0, on peut aussi utiliser le théorème de la limite de la dérivée :

   - on commence par vérifier que $f$ est bien continue en 0 (étude du comportement limite de $f(x)$ en 0)
   - on étudie le comportement limite de $f'(x)$ en 0
   - dans le cas où $f'(x)$ admet une limite finie $L$ en 0, alors $f$ est dérivable en 0 avec $f'(0) = L$.
     $f'$ est continue en 0.

   La méthode 2 est plus longue, mais permet d'obtenir un résultat plus fort.

   Complément : méthode 3

   On peut également étudier la dérivabilité en 0 en étudiant le comportement limite de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

   $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2}$

   En utilisant le DL d'ordre 2 de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, on a : $\ln(1+2x) - 2x \underset{x\to 0}{\sim} -2x^2$

   Par conséquent, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2$ . $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = -2$.

   *La dérivabilité de $f$ en 0 entraîne la continuité de $f$ en 0*

## Exercice 2 : étude d'une suite définie implicitement

1. <u>Présentation 1 :</u> **2 pts**

   On définit la fonction $f_n$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f_n(x) = x - \cos(\frac{x}{n})$.

   $f_n$ est **continue** et **strictement croissante** (comme somme de deux fonctions strictement croissantes),
   donc $f_n$ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers $[f_n(0), f_n(\frac{\pi}{2})]$.
   Or $f(0) = -1$ et $f_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \cos(\frac{\pi}{2n})$
   $f_n(\frac{\pi}{2}) \geq \frac{\pi}{2} - 1$, donc $f_n(\frac{\pi}{2}) > 0$.
   Par conséquent, l'intervalle $[f_n(0), f_n(\frac{\pi}{2})]$ contient 0.

   $\boxed{\text{Il existe donc un unique réel } x_n \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0}$

   <u>Présentation 2 :</u>

   On définit la fonction $f$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = x - \cos(\frac{x}{n})$.

   - $f$ est continue.
   - $f(0) = -1$
   - $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \cos(\frac{\pi}{2n}) \geq \frac{\pi}{2} - 1$, donc $f(\frac{\pi}{2}) > 0$.

   Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $f(x_n) = 0$.

   Comme $f$ est strictement croissante (comme somme de deux fonctions strictement croissantes), la fonction $f$ est injective et admet au plus une valeur d'annulation.

   $\boxed{\text{Ainsi, l'équation } \cos(\frac{x}{n}) = x \text{ une unique solution dans l'intervalle } [0, \frac{\pi}{2}]}$

2. Puisque $x_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (*la suite* $(x_n)$ *est bornée*), alors $\dfrac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0).

   $\boxed{\text{Ainsi, } x_n = \cos\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1}$ *composition de limites*

   $x_n - 1 = \cos\left(\dfrac{x_n}{n}\right) - 1$.
   Or $\cos(t) - 1 \underset{t\to0}{\sim} -\dfrac{t^2}{2}$, d'où $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x_n^2}{2n^2}$
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$, donc $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

   $\boxed{\text{On en déduit que } x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}}$ **2 pts**

3. On a $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, c'est-à-dire $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   $$x_n = \cos\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \cos\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

   $$\text{avec } u^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2 = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{et} \quad u^4 = \frac{1}{n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

   $\boxed{\text{D'où } x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{13}{24n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)}$ **2.5 pts**

   <u>Commentaire :</u>

   L'erreur classique est d'utiliser le développement limité de la fonction cos à l'ordre 4 au voisinage de 0 :
   $x_n = \cos\left(\dfrac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{x_n^2}{2n^2} + \dfrac{x_n^4}{24n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{x_n^4}{n^4}\right)$
   Puis de remplacer le terme $x_n$ par un équivalent (ici 1) dans une somme (**opération non valable**) :
   $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{24n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ **résultat FAUX**

   Il faut remplacer $x_n$ par son développement asymptotique : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

   et $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$\text{et } x_n^4 \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathrm{o}(1)$$

pour avoir un résultat correct.

---

## Exercice 3 : probabilités

1. **Étude d'un premier cas particulier**

(a) On a : $E_A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ (en effet, il ne faut pas que l'urne $B$ ne reçoive la moindre boule sinon elle est pleine).
Par indépendance des événements $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, on obtient donc :
$\boxed{p_A = P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_n) = p^n}$ **(1 point)**
$E_A$ et $E_B$ sont deux événements contraires, par conséquent : $\boxed{p_B = 1 - p_A = 1 - p^n}$ **(0.5 point)**

(b)
- Si $k = n$, alors l'événement $R_n$ est impossible : $\boxed{P(R_n) = 0}$ **(0.5 point)**
- Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$.
L'événement $R_k$ est réalisé lorsque les $k$ premières boules vont dans l'urne $A$ et la $k+1$-ième va dans l'urne $B$ qui devient pleine : $R_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap B_{k+1}$.

  Par indépendance de ces événements, on obtient $\boxed{P(R_k) = p^k(1-p)}$ **(1 point)**
- Pour calculer $P(R_0)$, on utilise le système complet d'événements $(E_A; E_B)$.
$P(R_0) = P(R_0 \cap E_A) + P(R_0 \cap E_B)$.
Or, $P(R_0 \cap E_A) = p_A = p^n$ et $P(R_0 \cap E_B) = P(B_1) = 1 - p$ (l'événement $R_0 \cap E_B$ est réalisé lorsque la première boule va dans l'urne $B$ qui devient alors pleine).
$\boxed{\text{Ainsi, } P(R_0) = p^n + 1 - p}$ **(1 point)**

  Remarquons au passage que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(R_k) = 1$ (*relation qui pouvait être d'ailleurs utilisée pour calculer* $P(R_0)$)

2. **Étude d'un deuxième cas particulier**

(a) Dès que l'on va placer la première boule, l'une des deux urnes va devenir pleine (et l'autre restera vide) et l'expérience s'arrêtera : $R_0$ est l'événement certain. $\boxed{P(R_0) = 1}$ **(0.75 point)**

(b) On utilise la relation : $R_0 = \big(A_1 \cap A_2\big) \cup \big(B_1 \cap B_2\big)$
Les événements de cette union étant incompatibles, on a alors :
$P(R_0) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2)$.
Or, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ (indépendance du choix de l'urne)
De même, $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2) = \dfrac{1}{4}$
Ainsi, $\boxed{P(R_0) = \dfrac{1}{2}}$

$(R_0; R_1)$ forme un système complet d'événements, d'où $\boxed{P(R_1) = 1 - P(R_0) = \dfrac{1}{2}}$ **(1.5 point)**

*Autre méthode :* on utilise le système complet d'événements $(E_A; E_B)$.
$P(R_1) = P(R_1 \cap E_A) + P(R_1 \cap E_B)$.

$$\begin{aligned}\text{Or, } P(R_1 \cap E_A) &= P\Big((A_1 \cap B_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap A_3)\Big) \\ &= P\Big((B_1 \cap A_2 \cap A_3))\Big) + P\Big((A_1 \cap B_2 \cap A_3))\Big) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

De même, $P(R_1 \cap E_B) = P\Big((B_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup (A_1 \cap B_2 \cap B_3)\Big) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$
d'où : $P(R_1) = \dfrac{1}{2}$.

(c) On effectue une série de $n - 1 + k$ épreuves de Bernoulli indépendantes. Le nombre de tirages où l'on obtient l'urne $A$ suit donc une loi binomiale de paramètres $(n - 1 + k, \frac{1}{2})$.
La probabilité qu'à l'issue du $(n - 1 + k)$-ième tirage l'urne $A$ contienne $n - 1$ boules et l'urne $B$ contienne $k$ boules est donc égale à $\dbinom{n+k-1}{n-1}\dfrac{1}{2^{n+k-1}}$ . **(1 point)**

On utilise le système complet d'événements $(E_A; E_B)$ : $P(R_k) = P(R_k \cap E_A) + P(R_k \cap E_B)$.

Or, $P(R_k \cap E_A) = \binom{n-1+k}{n-1} \frac{1}{2^{n+k-1}} \times \frac{1}{2}$ d'après ce qui précède (le dernier facteur $\frac{1}{2}$ exprimant le fait que la $n$-ième boule doit être mise dans l'urne $A$).

Par symétrie, on obtient évidemment : $P(R_k \cap E_B) = \binom{n-1+k}{n-1} \frac{1}{2^{n+k-1}} \times \frac{1}{2}$.

Par conséquent, $\boxed{P(R_k) = \binom{n+k-1}{n-1} \frac{1}{2^{n+k-1}}}$ **(1 point)**

(d) $2(k+1)P(R_{k+1}) = 2(k+1) \times \binom{n+k}{n-1} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{(k+1)(n+k)(n+k-1)!}{(n-1)!(k+1)!} \times \frac{1}{2^{n+k-1}}$

$$= (n+k) \times \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} \times \frac{1}{2^{n+k-1}} = (n+k)\binom{n+k-1}{n-1} \frac{1}{2^{n+k-1}}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall k \in [\![0, n-2]\!] \quad 2(k+1)P(R_{k+1}) = (n+k)P(R_k)}$ **(1.25 point)**

(e) On somme les égalités précédentes pour $k$ allant de 0 à $n-2$ :

$\sum_{k=0}^{n-2} 2(k+1)P(R_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-2} (n+k)P(R_k)$.

En effectuant un changement d'indice dans la somme de gauche et en utilisant la linéarité dans la somme de droite, il vient :

$\sum_{k=1}^{n-1} 2kP(R_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 2kP(R_k) = n \sum_{k=0}^{n-2} P(R_k) + \sum_{k=0}^{n-2} kP(R_k)$.

Ainsi, on a :

$2M = n \left( \sum_{k=0}^{n-1} P(R_k) - P(R_{n-1}) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} kP(R_k) - (n-1)P(R_{n-1})$,

Comme $\sum_{k=0}^{n-1} P(R_k) = 1$ (*ces événements forment un système complet d'événements*), on obtient :

$$2M = n \times 1 - nP(R_{n-1}) + M - (n-1)P(R_{n-1})$$

c'est-à-dire $\boxed{M = n - (2n-1)P(R_{n-1})}$ **(2.5 points)**

3. **Retour au cas général**

(a) Soit $k \in [\![0; m-1]\!]$.

L'événement $E_A \cap R_k$ est réalisé lorsque l'urne $A$ est pleine à l'issue du $(n+k)$-ième tirage, l'urne $B$ ayant alors reçu $k$ boules. On a donc : $E_A \cap R_k = C \cap A_{n+k}$ où $C$ et $A_{n+k}$ sont les événements :

$C$ : "l'urne $A$ contient $n-1$ boules et l'urne $B$ contient $k$ boules à l'issue de $n+k-1$ tirages"

$A_{n+k}$ : "on met une boule dans l'urne $A$ à la $n+k$-ième épreuve"

Le nombre de boules mises dans l'urne $A$ à l'issue de $n+k-1$ tirages suit une loi binomiale de paramètres $(n+k-1, p)$. On a ainsi : $P(C) = \binom{n-1+k}{n-1} \times p^{n-1} \times (1-p)^k$ .

$P(E_A \cap R_k) = P(C)\ P(A_{n+k})$ par indépendance de $A_{n+k}$ de l'événement $C$.

Ainsi, $\boxed{P(E_A \cap R_k) = \binom{n-1+k}{n-1} \times p^{n-1} \times (1-p)^k \times p}$ **(1.5 point)**

(b) Si c'est l'urne $A$ qui est pleine, il peut alors rester entre 0 et $m-1$ boules dans l'urne $B$. Par conséquent,

$$E_A = \bigcup_{k=0}^{m-1} (E_A \cap R_k)$$

Les événements étant deux à deux incompatibles, on a : $\boxed{P(E_A) = \sum_{k=0}^{m-1} P(E_A \cap R_k)}$

Par suite, la probabilité que l'urne $A$ soit pleine est donc :

$\boxed{p_A = P(E_A) = \sum_{k=0}^{m-1} P(E_A \cap R_k) = p^n \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1+k}{n-1} q^k}$ **(1 point)**

(c) Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. On a : $\displaystyle\binom{n-1+k}{n-1} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n-1+k)(n-1+k-1)\cdots n}{k!}$.

Le numérateur présente $k$ facteurs tous équivalents à $n$, d'où par produit fini :

$\boxed{\displaystyle\binom{n-1+k}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}}$ **(1.25 point)**

(d) En utilisant le résultat précédent, on a : $\displaystyle p^n\binom{n-1+k}{n-1}q^k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p^n n^k q^k}{k!}$

Comme $p \in ]0,1[$, d'après la comparaison des suites usuelles, $n^k$ est négligeable devant $\displaystyle\left(\frac{1}{p}\right)^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{p^n n^k q^k}{k!} = 0$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p^n \sum_{k=0}^{m-1}\binom{n+k-1}{n-1}q^k = 0$ (comme somme finie de termes de limite nulle).

Ainsi, $p_A$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. **(2 points)**

*Interprétation :* si l'urne $A$ peut contenir un grand nombre de boules, alors il est quasi-certain que ce soit l'urne $B$ qui soit pleine à l'issue de l'expérience.

4. **Application : problème du partage des mises**

Le joueur $A$ gagne 7 points à 5.
Pour gagner la partie, $A$ doit marquer 3 points avant que $B$ n'en marque 5.
Pour ramener ce problème à l'étude précédente, on peut considérer que chaque Pile obtenu revient à déposer une boule dans l'urne $A$ et chaque Face obtenu à déposer une boule dans l'urne $B$.
$A$ gagne lorsque son urne est pleine avant celle de $B$.
La capacité de l'urne $A$ étant de $n = 3$ boules et celle de $B$ étant de $m = 5$ boules, on peut obtenir avec le résultat de la question 3b la probabilité $p_A$ que $A$ gagne :

$$p_A = p^3 \sum_{k=0}^{4}\binom{k+2}{2}q^k$$

Ici, on a : $p = q = \dfrac{1}{2}$ .

On obtient : $p_A = \dfrac{99}{128}$ . $\boxed{\text{Il doit recevoir la somme de } 200 \times \frac{99}{128} \simeq 154.70 \text{ euros.}}$

Lorsqu'il gagne 8 points à 2, les résultats deviennent :

$$n = 2, \qquad m = 8, \qquad p_A = p^2\sum_{k=0}^{7}\binom{k+1}{1}q^k = \frac{251}{256}$$

$\boxed{\text{Il doit recevoir dans ce cas la somme de } 200 \times \frac{251}{256} \simeq 196 \text{ euros.}}$

**Compléments :**
Ce problème de partage des mises a été posé par le chevalier de Méré. Fermat proposa une solution obtenue par énumération dans un cas particulier. Pascal résolut le problème dans le cas général en 1653.
Voici l'idée de Pascal dans le cas particulier où le joueur $A$ gagne 7 points à 5 :

Il faut au plus 7 parties avant d'aboutir à la décision finale :

si $A$ gagne, $B$ a marqué au plus 4 points
si $B$ gagne, $A$ a marqué au plus 2 points.

L'astuce de Pascal est de considérer qu'il reste 7 lancers à réaliser et de compter les situations où le joueur $A$ gagne.

Il y a $2^7 = 128$ issues possibles (une suite de 7 lancers correspond à une 7-liste d'éléments de l'ensemble $\{P, F\}$).

On compte, parmi ces 128 issues, celles où le joueur $A$ gagne : ce sont celles où parmi les 7 lancers, on obtient au moins 3 Piles.

- il y a $\displaystyle\binom{7}{3} = 35$ listes avec 3 Piles (on choisit la position des 3 Piles parmi les 7 lancers)
- il y a $\displaystyle\binom{7}{4} = 35$ listes avec 4 Piles
- il y a $\displaystyle\binom{7}{5} = 21$ listes avec 5 Piles

• il y a $\binom{7}{6} = 7$ listes avec 6 Piles

• il y a $\binom{7}{7} = 1$ listes avec 7 Piles

Ainsi, $A$ gagne la partie 99 fois sur 128.

La probabilité qu'il gagne la partie est égale à $p_A = \dfrac{99}{128} \simeq 0.77$.

Dans le cas général où il manque $n$ points à $A$ pour gagner la partie, et $m$ points au joueur $B$, on a :

$$p_A = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k}$$

En effectuant un changement d'indices puis en tenant compte de la symétrie des coefficients binomiaux, on obtient :

$$p_A = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m-1}{k+n} = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m-1}{m-1-k}$$

Enfin, en inversant l'ordre de sommation, on trouve : $p_A = \dfrac{1}{2^{n+m-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m-1}{k}$