EXERCICE 1 : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[\quad f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} \quad \text{et} \quad f(0) = 2$$

Il est clair que f est de classe C^∞ sur $\left]0, +\infty\right[$.

On souhaite étudier et comparer l'étude de la fonction f en 0 par deux méthodes différentes.

1. <u>Méthode 1 :</u>
   Montrer que f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0. Qu'en déduit-on ?
2. <u>Méthode 2 :</u>
   (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Montrer que $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2$. Qu'en déduit-on ?

EXERCICE 2 : ÉTUDE D'UNE SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\cos\left(\frac{x}{n}\right) = x$ d'inconnue $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$, puis déterminer un équivalent de $x_n - 1$.
3. Déterminer un réel c tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{c}{n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$

EXERCICE 3 : PROBABILITÉS

Deux urnes A et B, initialement vides, peuvent contenir respectivement au plus n boules et m boules ($n \geq 1$ et $m \geq 1$).

On s'intéresse au protocole suivant

• On choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0, 1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1 - p$.

• On met une boule dans l'urne choisie.

• On répète cette épreuve autant de fois que nécessaire pour que l'une des deux urnes A ou B soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules pour l'urne A ou contienne m boules pour l'urne B, les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

On introduit quelques notations utiles dans la suite :

On note : E_A l'événement « l'urne A est pleine à l'issue de l'expérience » et p_A sa probabilité.
E_B l'événement « l'urne B est pleine à l'issue de l'expérience » et p_B sa probabilité.

Pour k entier naturel, on note :

A_k l'événement « à la $k$ième épreuve, on met une boule dans l'urne A »
B_k l'événement « à la $k$ième épreuve, on met une boule dans l'urne B »
R_k l'événement « l'urne qui n'est pas pleine à l'issue de l'expérience contient k boules »

1. **Étude d'un premier cas particulier**
   Dans cette partie seulement, on se place dans le cas particulier où $m = 1$: l'urne A peut contenir n boules (où $n \in \mathbb{N}^*$) et **l'urne B peut contenir une seule boule**. On place des boules dans les urnes A et B selon le protocole indiqué.
   (a) Calculer la probabilité p_A que ce soit l'urne A qui soit pleine à l'issue de l'expérience.
   En déduire p_B.
   (b) On rappelle que R_k est l'événement « l'urne qui n'est pas pleine à l'issue de l'expérience contient k boules ».
   Calculer $P(R_k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ (on traitera à part les situations $k = 0$ et $k = n$).
2. **Étude d'un deuxième cas particulier**
   Dans cette partie seulement $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.
   (a) Dans le cas où $m = n = 1$, calculer $P(R_0)$.
   (b) Dans le cas où $m = n = 2$, calculer $P(R_0)$ et $P(R_1)$.

On se place désormais dans le cas où $m = n$ et $n \geq 2$.

(c) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n-1+k)$-ième tirage l'urne A contienne $n-1$ boules et l'urne B contienne k boules.
En déduire que $P(R_k) = \binom{n+k-1}{n-1} \dfrac{1}{2^{n+k-1}}$.

(d) Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n-2]\!], \quad 2(k+1)P(R_{k+1}) = (n+k)P(R_k)$

(e) On note $M = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kP(R_k)$ (M correspond au nombre moyen de boules contenues dans l'urne non pleine à l'issue de l'expérience).
Par sommation de la relation qui précède, établir que : $M = n - (2n-1)P(R_{n-1})$

3. **Retour au cas général**

On abandonne les conditions $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

(a) Justifier que, pour $k \in [\![0, m-1]\!]$, on a : $P(E_A \cap R_k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$.

(b) On rappelle que $p_A = P(E_A)$ est la probabilité que l'urne A soit pleine à l'issue de l'expérience.
Montrer que $p_A = p^n \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k-1}{n-1} q^k$.

(c) Pour $k \in [\![0, m-1]\!]$, donner un équivalent de $\binom{n+k-1}{n-1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) En déduire la limite de p_A lorsque n tend vers $+\infty$.

4. **Application : problème du partage des mises**

Deux joueurs A et B jouent à une suite de parties à pile ou face et misent 100 euros chacun.

Le premier joueur qui marque 10 points emporte les 200 euros.

Le joueur A gagne 7 points à 5, mais un motif extérieur interrompt la partie.

Comment partager équitablement les 200 euros ?

Comment partager équitablement les 200 euros lorsque A gagne 8 points à 2 ?