Programme de colle pour la semaine du 25 mars

mathématiques MPSI : semaine 22

---

1. **Espaces vectoriels :**
   Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples.
   Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.
   Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.
   Famille presque nulle de scalaires, combinaison linéaire d'une famille (pas nécessairement finie) de vecteurs.
   Fiche technique 1.

2. **Sous-espaces vectoriels :**
   Sous-espaces vectoriels : définition, caractérisations.
   Intersection d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels.
   Sous-espace vectoriel engendré par une partie X. Comparaison de $\mathrm{Vect}(X)$ et $\mathrm{Vect}(Y)$.
   Droite vectorielle, plan vectoriel.
   Fiches techniques 2 et 3.

3. **Familles de vecteurs**
   Familles et parties génératrices.
   Familles libres, liées. Cas particulier des familles d'un ou deux vecteurs.
   Une famille est liée si et seulement si au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
   Ajout d'un vecteur à une famille libre.
   Fiche technique 4.
   Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.
   Bases, coordonnées. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

4. **Somme de deux sous-espaces vectoriels :**
   Somme de deux sous-espaces. Premiers résultats.
   $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)+ \mathrm{Vect}(y_1, ..., y_p) = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_p)$.
   Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.
   Sous-espaces supplémentaires.

5. **Espace vectoriel de dimension finie :**

   Un espace vectoriel est de dimension finie lorsqu'il possède une famille génératrice finie.
   Existence de bases en dimension finie.
   Théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite.

   Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de p vecteurs (avec $p > n$) est liée, et toute famille libre a un nombre d'éléments inférieur ou égal à n.
   Dimension d'un espace de dimension finie.
   Dimension des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
   En dimension n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.
   Dimension d'un produit d'espaces vectoriels de dimension finie.