Programme de colle pour la semaine du 2 avril

mathématiques MPSI : semaine 23

---

1. **Espace vectoriel de dimension finie : révision**

   Rang d'une famille finie de vecteurs.

2. **Sous-espaces et dimension :**

   Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.
   Sous-espaces supplémentaires en dimension finie :
   - En séparant en deux une base de E, on obtient des bases de sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
   - En réunissant les bases de deux sev supplémentaires de E, on obtient une base de E.

   Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire.
   Dimension d'une somme : formule de Grassmann. Caractérisation des sommes directes.
   Caractérisation des couples de sous-espaces supplémentaires.

3. **Généralités sur les applications linéaires :**
   Définitions : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire.
   Opérations sur les applications linéaires.
   Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.
   Noyau et image d'une application linéaire.
   Familles de vecteurs et applications linéaires (cf question de cours).

4. **Endomorphismes :**
   Anneau $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$. Automorphismes, groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$.
   Homothéties.
   Projecteur : définition et propriétés. Caractérisation.

Questions de cours :

— Question de cours n°1 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
f est injective $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

Question de cours n°2 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ **injective** et soit $(x_1,...,x_n)$ une famille libre de vecteurs de E.
Alors $(f(x_1),...,f(x_n))$ est une famille libre de vecteurs de F.

— Question de cours n°3 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $(x_1,...,x_n)$ une famille génératrice de E.
Alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(x_1),...,f(x_n)\big)$: *ie* $\big(f(x_1),...,f(x_n)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\ f$.

— Question de cours n°4 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ une base de E.
Si $f(\mathcal{B}) = \big(f(e_1),...,f(e_n)\big)$ est une famille libre, alors f est injective.

— Question de cours n°5 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ une base de E.
Si $f(\mathcal{B}) = \big(f(e_1),...,f(e_n)\big)$ est une famille génératrice de F, alors f est surjective.