Exercice 25 TD 21

Hyp : p, q projecteurs, $p \circ q = 0$

⚠ a priori, $q \circ p \neq 0$

On pose $r = p + q - q \circ p$

- r est linéaire
- $r^2 = (p + q - q \circ p)(p + q - q \circ p)$

$$= p^2 + p \circ q - p \circ q \circ p + q \circ p + q^2 - q^2 \circ p$$

$$- q \circ p^2 - q \circ p \circ q + q \circ p \circ q \circ p$$

Or $p \circ q = 0$, $p \circ q \circ p = 0$, $q \circ p \circ q = 0$ et $q \circ p \circ q \circ p = 0$

d'où : $r^2 = p + q \circ p + q - q \circ p - q \circ p$

$$= p + q - q \circ p$$

$$= r$$

$\boxed{r \text{ est un projecteur}}$.

- Mq $Ker(r) = Ker(p) \cap Ker(q)$:

Soit $x \in Ker(p) \cap Ker(q)$: $p(x) = q(x) = 0$

d'où $r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x))$

$= -q(0) = 0$

$x \in Ker(r)$

Soit $x \in Ker(r)$: $r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = 0$

On applique p : $p(p(x)) + p(q(x)) - p(q(p(x))) = 0$

$p(x) + 0 - 0 = 0$

(car $p \circ q = 0$)

$p(x) = 0$: $x \in Ker(p)$

On obtient alors : $r(x) = q(x) - q(0) = 0$

$q(x) = 0$: $x \in Ker(q)$

• <u>Mq $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$</u>

les éléments de l'espace
image d'un projecteur sont
les invariants de ce projecteur

ⓐ mq $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(r)$:

Soit $x \in \text{Im}(p)$: $\quad p(x) = x$

$$\begin{aligned} r(x) &= p(x) + q(x) - q(p(x)) \\ &= x + q(x) - q(x) \\ &= x \end{aligned}$$

donc $x \in \text{Im}(r)$

ⓑ mq $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(r)$:

Soit $x \in \text{Im}(q)$: $\quad q(x) = x$

$$\begin{aligned} r(x) &= p(x) + q(x) - q(p(x)) \\ &= p(x) + x - q(p(x)) \end{aligned}$$

Or $p(x) = p(q(x)) = 0$

car $p \circ q = 0$

et $q(p(x)) = q(0) = 0$

d'où $r(x) = x$, donc $x \in \text{Im}(r)$

$\longrightarrow$ $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q)$ sont des sev de $\text{Im}(r)$

$$\text{Im}(p) + \text{Im}(q) \subset \text{Im}(r)$$

ⓒ mq $\mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$:

Soit $x \in \mathrm{Im}(r)$: $r(x) = x$

$$p(x) + q(x) - q(p(x)) = x$$

Objectif : trouver $u \in \mathrm{Im}(p)$ et $v \in \mathrm{Im}(q)$

tq $u + v = x$

On pose : $u = p(x) \longrightarrow u \in \mathrm{Im}(p)$

$v = q(x) - q(p(x)) \longrightarrow v \in \mathrm{Im}(q)$

et $x = u + v$

d'où $\underline{\underline{x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)}}$