Exercice : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ (DS 2023)

1. **Barème : 2 points (1 point pour la résolution du système avec l'introduction de 2 paramètres, 0.5 point pour la mise en évidence d'une famille génératrice, 0.5 point pour la justification que la famille est libre)**

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in F &\iff \begin{cases} 2x-4y+z+t &= 0 \\ 3x-y+4z-t &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x-4y+z+t &= 0 \\ x-y+z &= 0 \end{cases} \qquad L_2 \longleftarrow \tfrac{1}{5}(L_1+L_2) \\
&\iff \begin{cases} x = x \\ y = x+z \\ z = z \\ t = 2x+3z \end{cases}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On en déduit que } F = \left\{(x,x+z,z,2x+3z) \mid (x,z)\in\mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(u,v) \text{ avec } u=(1,1,0,2) \text{ et } v=(0,1,1,3)}$

Les deux vecteurs u et v forment une famille génératrice de F. Comme de plus, ils ne sont pas colinéaires, ils sont linéairement indépendants.

$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (u,v) \text{ forme une base de } F}$

2. **Barème : 2 points (0.5 point pour la relation linéaire exprimant c en fonction de a et b, 1.5 point pour les équations linéaires caractérisant G)**

On a : $c = 3a+2b$. Par conséquent, $G = \mathrm{Vect}(a,b)$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in G &\iff \text{il existe } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } \lambda_1 a+\lambda_2 b = (x,y,z,t) \\
&\iff \text{il existe } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2 &= x \\ -2\lambda_1+\lambda_2 &= y \\ \lambda_1+\lambda_2 &= z \\ \lambda_1+2\lambda_2 &= z \end{cases} \\
&\iff \text{il existe } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2 &= x \\ -\lambda_1 &= y+x \\ 2\lambda_1 &= z+x \\ 3\lambda_1 &= 2x+t \end{cases} \\
&\iff -(y+x) = \frac{z+x}{2} \text{ et } -(y+x) = \frac{2x+t}{3} \\
&\iff 3x+2y+z=0 \text{ et } 5x+3y+t=0.
\end{aligned}$$

Ces deux dernières équations caractérisent les éléments de G :

$$\boxed{G = \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 3x+2y+z=0 \text{ et } 5x+3y+t=0\right\}}$$

3. **Barème : 2.25 points**

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in F\cap G &\iff \begin{cases} 2x-4y+z+t &= 0 \\ 3x-y+4z-t &= 0 \\ 3x+2y+z &= 0 \\ 5x+3y+t &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x-4y+z+t &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ 3x+2y+z &= 0 \\ 3x+7y-z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ L_2 \longleftarrow \tfrac{1}{5}(L_1+L_2) \\ \\ L_4 \longleftarrow L_4-L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x-4y+z+t &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ 2x+3y &= 0 \\ 4x+6y &= 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \longleftarrow L_3-L_2 \\ L_4 \longleftarrow L_4+L_2 \end{matrix} \\
&\iff \begin{cases} x = x \\ y = -\frac{2}{3}x \\ z = y-x = -\frac{5}{3}x \\ t = 4y-2x-z = -3x \end{cases}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } F\cap G = \mathrm{Vect}\big((3,-2,-5,-9)\big) \text{ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur } w=(3,-2,-5,-9)}$

4. **Barème : 0.75 point**

On vérifie aisément que $u\in H$ et $v\in H$ (les composantes de ces deux vecteurs vérifient l'équation de H).

On en déduit que $\mathrm{Vect}(u,v)\subset H$, $\boxed{\text{donc } F\subset H}$

De même, $a\in H$ et $b\in H$, $\boxed{\text{donc } G\subset H}$

5. **Barème : 2 points**

<u>Méthode 1 :</u> on détermine une équation de l'espace vectoriel $F+G$

$F+G = \mathrm{Vect}(u,v,a,b)$.

$(x,y,z,t) \in F+G \iff$ il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 a + \lambda_4 b = (x,y,z,t)$

$$\iff \text{il existe } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = x \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & -2\lambda_3 & +\lambda_4 & = y \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = z \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & = t \end{array}\right.$$

$$\iff \text{il existe } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = x \\ & \lambda_2 & -3\lambda_3 & +2\lambda_4 & = y-x \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = z \\ & 3\lambda_2 & -\lambda_3 & +4\lambda_4 & = t-2x \end{array}\right.$$

$$\iff \text{il existe } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = x \\ & \lambda_2 & -3\lambda_3 & +2\lambda_4 & = y-x \\ & & 4\lambda_3 & -\lambda_4 & = z-y+x \\ & & 8\lambda_3 & -2\lambda_4 & = t+x-3y \end{array}\right.$$

$$\iff 2(z-y+x) = t+x-3y$$

$$\iff x+y+2z-t=0 \qquad \textit{on reconnaît l'équation de } H$$

$\boxed{\text{Ainsi, } F+G=H}$

<u>Méthode 2 :</u> on procède par double inclusion

F et G sont des sous-espaces vectoriels de H, donc $F+G \subset H$.

$$(x,y,z,t) \in H \iff x+y+2z-t=0 \iff \left\{\begin{array}{l} x=x \\ y=y \\ z=z \\ t=x+y+2z \end{array}\right.$$

On en déduit que $H = \Big\{(x,y,z,x+y+2z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\Big\} = \mathrm{Vect}(w_1,w_2,w_3)$ avec $w_1=(1,0,0,1)$ et $w_2=(0,1,0,1)$ et $w_3=(0,0,1,2)$

On rappelle que $F=\mathrm{Vect}(u,v)$ avec $u=(1,1,0,2)$ et $v=(0,1,1,3)$ et $G=\mathrm{Vect}(a,b)$.
On vérifie que :

- $w_1 = \frac{3}{4}u - \frac{1}{4}v + \frac{1}{4}a$
- $w_2 = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{4}a$
- $w_3 = -\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}a$

Cela prouve que $w_1 \in F+G$, $w_2 \in F+G$ et $w_3 \in F+G$
On en déduit que : $\mathrm{Vect}(w_1,w_2,w_3) \subset F+G$,c'est-à-dire : $H \subset F+G$.

<u>Méthode 3 :</u> on utilise les résultats sur les dimensions

F et G sont des sous-espaces vectoriels de H, donc $F+G \subset H$.

On sait également que : $\dim(F)=2$, $\dim(G)=2$ et $\dim(F\cap G)=1$.
Donc d'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=3$.
Comme $F+G \subset H$, on a $\dim(F+G) \leq \dim(H)$, donc $3 \leq \dim(H)$.
De plus, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ distinct de $\mathbb{R}^4$, donc $\dim(H) < 4$.
On en déduit que $\dim(H)=3$.

On a ainsi $F+G \subset H$ et $\dim(F+G)=\dim(H)$: $\boxed{\text{par conséquent, } F+G=H}$

---

1. **Exercice 1 :**

   $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$ engendrent l'espace $\mathbb{R}^2$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big(f(e_1),f(e_2)\Big) = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(1,1,-1)}_{v_1},\underbrace{(1,-2,3)}_{v_2}\Big)$.

   v_1 et v_2 étant non colinéaires, ces deux vecteurs forment une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   Ainsi, $\mathrm{rg}(f)=\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)=2$.

   Comme $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathbb{R}^2)$, alors f est injective : $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\{0\}}$

   On peut aussi déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ *en résolvant le système* $f(x,y)=0$

Déterminons une équation du plan $\mathrm{Im}(f)$:

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in \mathrm{Im}(f) &\Longleftrightarrow \exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2 \quad \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=(x,y,z)\\
&\Longleftrightarrow \exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2 \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & x\\ \lambda_1 & - & 2\lambda_2 & = & y\\ -\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & = & z\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2 \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & x\\ & & 3\lambda_2 & = & x-y\\ & & 4\lambda_2 & = & x+z\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \frac{x+z}{4}=\frac{x-y}{3}\\
&\Longleftrightarrow -x+4y+3z=0
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi deux descriptions possibles de $\mathrm{Im}(f)$ (*l'énoncé n'imposant pas de description particulière, on pouvait se contenter de donner une base de Im*(f))

$\boxed{v_1=(1,1,-1) \text{ et } v_2=(1,-2,3) \text{ forment une base de } \mathrm{Im}(f)}$

$\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est le plan d'équation } -x+4y+3z=0}$

---

2. **Exercice 2 :**

(a) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in \mathrm{Ker}(f) &\Longleftrightarrow f(x,y,z)=(0,0,0)\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lclcll} x & + & y & + & z & =0\\ -3x & - & 2y & & & =0\\ -x & & & + & 2z & =0\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lclcll} x & + & y & + & z & =0\\ -3x & - & 2y & & & =0\\ -3x & - & 2y & & & =0 \qquad L_3\longleftarrow L_3-2L_1\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Ce dernier système est échelonné et a deux équations principales : on introduit un paramètre x

$$
\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=x\\ \\ y=-\frac{3}{2}x\\ \\ z=\frac{1}{2}x\end{array}\right.
$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f)=\Big\{(x,-\frac{3}{2}x,\frac{1}{2}x)\mid x\in\mathbb{R}\Big\}=\mathrm{Vect}\Big((1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2})\Big)$

On a également : $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\big(u\big)$ avec $u=(2,-3,1)$.

$\boxed{\text{Le vecteur } u \text{ étant non nul, il forme une base de } \mathrm{Ker}(f)}$

Les vecteurs $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ engendrent l'espace $\mathbb{R}^3$,

donc $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\Big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\Big)=\mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(1,-3,-1)}_{v_1},\underbrace{(1,-2,0)}_{v_2},\underbrace{(1,0,2)}_{v_3}\Big)$.

Comme $v_1=\dfrac{3}{2}v_2-\dfrac{1}{2}v_3$, on a : $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\Big(v_2,v_3\Big)$.

$\boxed{v_2 \text{ et } v_3 \text{ étant non colinéaires, ces deux vecteurs forment une base de } \mathrm{Im}(f)}$

(b) On remarque que : $u=\dfrac{3}{2}v_2+\dfrac{1}{2}v_3$

On en déduit que : $u\in\mathrm{Vect}\Big(v_2,v_3\Big)$, c'est-à-dire : $u\in\mathrm{Im}(f)$.

Un passage au Vect donne : $\mathrm{Vect}(u)\subset\mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Im}(f)}$

(c) On en déduit que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(f)$ est différent de l'espace nul.
Les sous-espaces vectoriels Ker(f) et Im(f) ne sont pas supplémentaires.

<u>Remarque</u> : $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(f)$

---

3. **Exercice 3 :**

a) $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ \underbrace{(f \circ g)}_{= \mathrm{Id}_F} \circ f = g \circ f$, **donc $g \circ f$ est un projecteur.**

b) Par double inclusion.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$: $f(x) = 0$
$g(f(x)) = g(0) = 0$ car g est linéaire.
Donc $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$: $g(f(x)) = 0$.
Donc $f(g(f(x)) = f(0) = 0$, ce qui donne $\underbrace{(f \circ g)}_{= \mathrm{Id}_F}(f(x)) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = 0$.

Donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)}$

c) Soit $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$: il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = y$.
Donc $y \in \mathrm{Im}(g)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$: il existe $x \in F$ tel que $g(x) = y$.
Or $x = \mathrm{Id}_F(x) = f(g(x))$.
D'où $y = (g \circ f)(g(x))$, et ainsi $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(f)}$

d) Comme $g \circ f$ est un projecteur, on a : $\mathrm{Ker}(g \circ f) \oplus \mathrm{Im}(g \circ f) = E$ (*le noyau et l'image d'un projecteur sont des sev supplémentaires*).

Ce qui donne : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = E}$

---

4. **Exercice 4 :**

• **Déterminons une base de F :**
Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$(x,y,z,t) \in F \iff \begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ \quad x - z + 2t &= 0 \end{cases}$$

Ce dernier système est échelonné et a deux équations principales : on introduit deux paramètres z et t

$$\iff \begin{cases} x = z - 2t \\ y = -2z + t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

$\boxed{\text{On en déduit que } F = \left\{(z-2t, -2z+t, z, t) \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(u_3, u_4) \text{ avec } u_3 = (1,-2,1,0) \text{ et } u_4 = (-2,1,0,1))}$

Les deux vecteurs u_3 et u_4 ne sont pas colinéaires, donc forment une base de F.

• **Montrons que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$:**
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & - & 2\lambda_4 = & 0 \\ & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 = & 0 \\ & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & & + & \lambda_4 = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & - & 2\lambda_4 = & 0 \\ & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 = & 0 \\ & & & 3\lambda_3 & - & \lambda_4 = & 0 \\ & & - & \lambda_3 & + & 3\lambda_4 = & 0 \end{cases} \quad \text{avec les opérations } L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \text{ et } L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$$

On obtient facilement que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
La famille est libre et a le même nombre d'éléments que la dimension de $\mathbb{R}^4$, donc $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Par conséquent, $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) \oplus \mathrm{Vect}(u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$, $\boxed{\text{donc } F \oplus G = \mathbb{R}^4}$

• **Décomposition de $a = (1, 2, 1, 2)$:**

Il existe un unique couple $(b, c) \in F \times G$ tel que $a = b + c$.
$c \in G$: il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1)$.
$b = a - c = (1 - \lambda_1, 2 - \lambda_2, 1 - \lambda_2, 2 - \lambda_1)$

Comme $b \in F$, les composantes de b vérifient les équations caractéristiques de F :

$$\begin{cases} (1-\lambda_1)+(2-\lambda_2)+(1-\lambda_2)+(2-\lambda_1)=0 \\ (1-\lambda_1)-(1-\lambda_2)+2(2-\lambda_1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=3 \\ 3\lambda_1-\lambda_2=4 \end{cases}$$

Ce qui donne : $\lambda_1=\dfrac{7}{4}$ et $\lambda_2=\dfrac{5}{4}$

$\boxed{\text{On obtient finalement : } c=\frac{1}{4}\big(7,5,5,7\big) \text{ et } b=\frac{1}{4}\big(-3,3,-1,1\big)}$

---

5. **Exercice 5 :**

(a) (X,X^2) est une famille libre, donc c'est une base de G : $\boxed{\dim(G)=2}$

Soit $P=aX^2+bX+c$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.
$P\in F \iff P(2)=0$
$\iff 4a+2b+c=0$
$\iff \begin{cases} a=a \\ b=b \\ c=-4a-2b \end{cases}$
D'où $F=\Big\{aX^2+bX-4a-2b \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\Big\}=\text{Vect}(P_1,P_2)$ avec $P_1=X^2-4$ et $P_2=X-2$.

P_1 et P_2 étant deux polynômes non nuls de degrés distincts, ils forment une base de F : $\boxed{\dim(F)=2}$

(b) Soit $P\in F\cap G$.
$P\in G$: il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $P=aX^2+bX$
$P\in F$, donc $P(2)=0$, ce qui donne : $4a+2b=0$.
On obtient $b=-2a$, puis $P=a(X^2-2X)$.
On en déduit que $P\in\text{Vect}(X^2-2X)$ et donc $F\cap G\subset\text{Vect}(X^2-2X)$

Il est évident que le polynôme X^2-2X appartient à G et à F (*il s'annule au point 2*).
$X^2-2X\in F\cap G$, puis $\text{Vect}(X^2-2X)\subset F\cap G$.

$\boxed{\text{Ainsi, } F\cap G=\text{Vect}(X^2-2X)}$

(c) F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, donc $F+G\subset\mathbb{R}_2[X]$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=2+2-1=3$.
$\dim(F+G)=\dim(\mathbb{R}_2[X])$.

$\boxed{\text{Par conséquent, } F+G=\mathbb{R}_2[X]}$

(d) On pose $Q_1=-\dfrac{X}{2}+1$ et $Q_2=X^2+\dfrac{3X}{2}$.
Alors $Q_1\in F$ (*ce polynôme s'annule en 2*), $Q_2\in G$ et $Q_1+Q_2=P$.

<u>Remarque :</u> la somme n'étant pas directe, il n'y a pas unicité de la décomposition.
Voici un autre exemple de décomposition de P :

$$X^2+X+1=\Big(-\frac{X^2}{4}+1\Big)+\Big(\frac{5X^2}{4}+X\Big)$$

---

6. **Exercice 6 :**

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$(x,y,z)\in F \iff \begin{cases} x=-y+2z \\ y=y \\ z=z \end{cases}$

On a donc : $F=\Big\{(-y+2z,y,z) \mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\Big\}=\text{Vect}\Big(\underbrace{(-1,1,0)}_{v_1},\underbrace{(2,0,1)}_{v_2}\Big)$

v_1 et v_2 étant non colinéaires, ces deux vecteurs forment une base de F. Par conséquent, $\dim(F)=2$.

On pourrait montrer que F et G sont supplémentaires en montrant que la famille (v_1,v_2,u) est une base de $\mathbb{R}^3$ (cf exercice 4). Pour varier les méthodes, on va étudier ici l'intersection de ces deux sous-espaces (en limitant les calculs).

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de la droite G, par conséquent, $F \cap G$ est soit égal à l'espace nul $\{0\}$, soit égal à G.
Comme les composantes du vecteur u ne vérifie pas l'équation du plan F, on en déduit que $u \notin F$.
Par conséquent, $F \cap G$ ne peut pas être égal G, et ainsi, $F \cap G = \{0\}$.

De plus, $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^3}$

Pour déterminer l'expression analytique de $p(x, y, z)$, on va exploiter les deux informations suivantes :

$$\begin{cases} p(x,y,z) \text{ est un vecteur de } F \\ \\ p(x,y,z) - (x,y,z) \text{ est un vecteur de } G \end{cases}$$

Comme $p(x, y, z) - (x, y, z)$ est un vecteur de G, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $p(x, y, z) - (x, y, z) = \lambda \cdot u = (2\lambda, \lambda, \lambda)$
On obtient ainsi $p(x, y, z) = (x + 2\lambda, y + \lambda, z + \lambda)$
$p(x, y, z)$ appartient à F, donc ses composantes vérifient l'équation de F :

$$(x + 2\lambda) + (y + \lambda) - 2(z + \lambda) = 0$$

Ce qui donne : $\lambda = -x - y + 2z$, $\boxed{\text{puis } p(x,y,z) = (x+2\lambda, y+\lambda, z+\lambda) = \big(-x-2y+4z, -x+2z, -x-y+3z\big)}$

On utilise la relation $p + q = \mathrm{Id}$ pour déterminer q :

$$\boxed{q(x,y,z) = (x,y,z) - p(x,y,z) = \big(2x+2y-4z, x+y-2z, x+y-2z\big)}$$

On utilise la relation $s = p - q$ pour déterminer s :

$$\boxed{s(x,y,z) = \big(-3x-4y-8z, -2x-y+4z, -2x-2y+5z\big)}$$

Enfin, on a $s' = q - p$, donc $s' = -s$, ce qui donne :

$$\boxed{s'(x,y,z) = \big(3x+4y+8z, 2x+y-4z, 2x+2y-5z\big)}$$

---

7. **Exercice 7 :**

a) $q - p$ est linéaire et $(q - p)^2 = q^2 - q \circ p - p \circ q + p^2 = q - p - p + p = q - p$.
Donc $q - p$ est un projecteur.

b) Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$: $p(x) = x$.
$(q - p)(x) = q(x) - p(x) = q(p(x)) - p(x) = 0$ car $q \circ p = p$, ce qui prouve que $x \in \mathrm{Ker}(q - p)$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q - p)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(q)$: $q(x) = 0$.
$(q - p)(x) = q(x) - p(x) = -p(x) = 0$
Or $p = p \circ q$, d'où $p(x) = p(q(x)) = p(0) = 0$,
Donc $(q - p)(x) = 0$, ce qui prouve que $x \in \mathrm{Ker}(q - p)$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(q - p)$.

c) $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(q)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{Ker}(q - p)$, donc $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(q - p)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(q - p)$: $q(x) - p(x) = 0$.
On pose $u = p(x)$ et $v = x - q(x)$.
Alors $u \in \mathrm{Im}(p)$ et $q(v) = q(x) - q^2(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(q)$.
Et $u + v = p(x) + x - q(x) = x$ (car $q(x) = p(x)$), donc $x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(q - p) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

On a ainsi montré par double inclusion : $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(q - p)$.

Il reste à montrer que la somme est directe :
Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ $p(x) = x$ et $q(x) = 0$.
D'où $x = p(x) = p(q(x))$ (car $p = p \circ q$)
Ce qui donne : $x = p(0) = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) = \{0\}$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(q - p)}$$

---

8. **Exercice 8 :**

Notons $u_k = e_k + e_{k+1}$ (pour $k \leq n - 1$) et $u_n = e_n + e_1$.

• **Supposons n pair :**

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \big(e_k + e_{k+1}\big) = \sum_{k=1}^{n-1} \Big((-1)^{k-1} e_k - (-1)^k e_{k+1}\Big)$$

On reconnaît une somme télescopique.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}u_k = e_1 - (-1)^{n-1}e_n = e_1 + e_n$ car $n-1$ est impair.

Ainsi, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}u_k$

L'un des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres : **la famille $\mathcal{F}$ est liée.**

Ce n'est donc pas une base de E.

Autre présentation du calcul précédent :

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + u_{n-1} = (e_1+e_2) - (e_2+e_3) + (e_3+e_4) - (e_4+e_5) + ... + (e_{n-1}+e_n)$

le dernier terme est compté positivement car il y a un nombre impair de termes

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + u_{n-1} = e_1 + e_n = u_n$

• **Supposons n impair et montrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre :**

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = 0$

On a alors : $(\lambda_1+\lambda_n)e_1 + (\lambda_1+\lambda_2)e_2 + (\lambda_2+\lambda_3)e_3 + ... + (\lambda_{n-1}+\lambda_n)e_n = 0$

La famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ étant libre, on déduit que :

$$\lambda_1 + \lambda_n = 0 \text{ et } \forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad \lambda_k + \lambda_{k+1} = 0$$

Comme $\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad \lambda_{k+1} = -\lambda_k$, alors $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_k = (-1)^{k+1}\lambda_1$ (*progression géométrique de raison* -1)

En particulier, $\lambda_n = \lambda_1$ car $n+1$ est pair.

De plus, $\lambda_1 + \lambda_n = 0$, d'où $2\lambda_1 = 0$, puis $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_k = 0$

La famille $\mathcal{F}$ est libre.

De plus, Card($\mathcal{F}$) $= n = \dim(E)$, **la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.**

---

9. **Exercice 9 :**

• $u+v$ est un automorphisme, donc $\mathrm{rg}(u+v) = n$.

• Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$: il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$.

On a : $v(y) = v(u(x)) = 0$ car $v \circ u = 0$.

Donc $y \in \mathrm{Ker}(v)$.

Ainsi, $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

On en déduit : $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(v))$.

Or d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(v)) + \mathrm{rg}(v) = \dim(E) = n$.

D'où $\mathrm{rg}(u) \leq n - \mathrm{rg}(v)$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leq n$.

• Soit $y \in \mathrm{Im}(u+v)$: il existe $x \in E$ tel que $u(x) + v(x) = y$.

$u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$, donc $y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

On a montré que : $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$

Par conséquent, $\dim(\mathrm{Im}(u+v)) \leq \dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v))$

Et on sait d'après le cours que $\dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)) \leq \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(v))$

D'où $n = \mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

---

10. **Exercice 10 :**

Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$ (car $f(x)$ est colinéaire à x, attention le scalaire λ_x dépend du vecteur x). Il reste à démontrer que le coefficient de colinéarité est constant : ie $\forall (x,y) \in E^2 \quad \lambda_x = \lambda_y$.

Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

<u>On suppose que (x,y) est libre :</u>

On a $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ et $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$.

On obtient : $\big(\lambda_{x+y} - \lambda_x\big)x + \big(\lambda_{x+y} - \lambda_y\big)y = 0_E$.

Comme la famille (x,y) est libre, on déduit que : $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$.

Par conséquent, $\lambda_x = \lambda_y$.

<u>On suppose que (x,y) est liée :</u>

Alors y est colinéaire à x : il existe $\mu \in \mathbb{K}^*$ tel que $y = \mu x$.

$f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$ et $f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$.

Comme $x \neq 0$, on obtient $\mu\lambda_y = \mu\lambda_x$, puis $\lambda_y = \lambda_x$.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout vecteur x non nul de E, on ait $f(x) = \lambda x$.

La relation s'étend au vecteur nul (car $f(0_E) = 0_E$).

---

11. **Exercice 11 :**

Stratégies possibles : on dispose de plusieurs méthodes pour démontrer qu'un endomophisme f est bijectif.

- on prouve par analyse synthèse que l'équation $f_\lambda(x) = y$ d'inconnue x admet une unique solution

- on met en évidence une application g tel que $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}$.

La mise en oeuvre de la deuxième méthode nécessite de trouver au préalable g.

On peut penser ici à étudier ce que donne la composition $f_\lambda \circ f_\mu$ (ce qui revient à chercher g sous la forme particulière f_μ), puis ajuster la valeur de μ pour avoir $f_\lambda \circ f_\mu = \mathrm{Id}$.

Méthode 1 :

• On suppose $\lambda \neq -1$.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$.
On a : $f_\lambda \circ f_\mu = (\lambda p + \mathrm{Id}) \circ (\mu p + \mathrm{Id})$
$= \lambda\mu p^2 + \lambda p + \mu p + \mathrm{Id}$
$= (\lambda\mu + \lambda + \mu)p + \mathrm{Id}$ car $p^2 = p$.

On a les équivalences suivantes : $\lambda\mu + \lambda + \mu = 0 \iff \mu(\lambda+1) = -\lambda$
$\iff \mu = -\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$

En posant $\mu = -\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$ (possible car $\lambda \neq -1$), on a donc $f_\lambda \circ f_\mu = \mathrm{Id}$.

Un calcul similaire établit que $f_\mu \circ f_\lambda = \mathrm{Id}$.

Ce qui prouve que f_λ est un automorphisme et que $f_\lambda^{-1} = f_\mu$ avec $\mu = -\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.

On a seulement prouvé ici une implication, on démontre l'implication réciproque par contraposition.

• On suppose $\lambda = -1$.
Soit $x \in E$.
$x \in \mathrm{Ker}(f_{-1}) \iff -p(x) + x = 0$
$\iff p(x) = x$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f_{-1}) = \mathrm{Im}(p) \neq \{0\}$ (car p n'est pas l'application nulle).
f_{-1} n'est pas injective, donc n'est pas bijective.

• On a ainsi démontré l'équivalence : $\boxed{f_\lambda \in \mathrm{GL}(E) \iff \lambda \neq -1}$

Méthode 2 :

• On suppose $\lambda \neq -1$, et on montre par analyse synthèse que l'équation $f_\lambda(x) = y$ d'inconnue x admet une unique solution

Analyse : supposons que $f_\lambda(x) = y$.
$\lambda p(x) + x = y$.

On applique p : $p(\lambda p(x) + x) = p(y)$ ou encore $(\lambda+1)p(x) = p(y)$.

Comme $\lambda + 1 \neq 0$, on obtient $p(x) = \dfrac{1}{\lambda+1}p(y)$.

Puis $x = y - \lambda p(x) = y - \dfrac{\lambda}{\lambda+1}p(y)$.

Synthèse : supposons que $x = y - \dfrac{\lambda}{\lambda+1}p(y)$.

Alors $x \in E$ et $f_\lambda(x) = \lambda p(x) + x$.

Or $p(x) = p(y) - \dfrac{\lambda}{\lambda+1}p^2(y) = p(y) - \dfrac{\lambda}{\lambda+1}p(y) = \dfrac{1}{\lambda+1}p(y)$.

D'où $f_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}p(y) + y - \dfrac{\lambda}{\lambda+1}p(y) = y$

Ainsi, f_λ est bijective, et $\forall y \in E \quad f_\lambda^{-1}(y) = y - \dfrac{\lambda}{\lambda+1}p(y) = f_\mu(y)$ avec $\mu = -\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.

• cf méthode 1 pour l'implication réciproque.

---

12. **Exercice 12 :**

(a) $\mathrm{Im}(f)$ est une droite vectorielle de E : **il existe donc** un vecteur x_0 non nul de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(x_0)$.
Pour tout vecteur x de E, le vecteur $f(x)$ est un élément de $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(x_0)$: $f(x)$ est colinéaire à x_0.
Il existe donc un scalaire $u(x)$ pour lequel $f(x) = u(x)x_0$.

On a ainsi défini une application u de E vers $\mathbb{K}$.

Il reste à prouver que u est une forme linéaire non nulle sur E.

Soit pour cela $(x,x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

D'une part, $f(\lambda x + x') = u(\lambda x + x')x_0$.

D'autre part, $f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x')$ *linéarité de f*
$= \lambda u(x)x_0 + u(x')x_0$.

On en déduit que : $\big(u(\lambda x + x') - \lambda u(x) - u(x')\big)x_0 = 0$.

Comme x_0 est non nul, alors $u(\lambda x + x') - \lambda u(x) - u(x') = 0$ et donc $u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x')$.

u est une forme linéaire sur E.

(b) Soit $x \in E$.

$f^2(x) = f(f(x)) = f(u(x)x_0) = u(x)f(x_0)$. *on rappelle que $u(x)$ est un scalaire*

Or $f(x_0) = u(x_0)x_0$.

D'où $f^2(x) = u(x_0)u(x)x_0 = u(x_0)f(x)$.

$\boxed{\text{En posant } \lambda = u(x_0), \text{ on a : } \forall x \in E,\ f^2(x) = \lambda f(x), \text{ c'est-à-dire } f^2 = \lambda f}$

(c) Soit $\alpha \in \mathbb{K}^* \setminus \{\lambda\}$.
Soit $\beta \in \mathbb{K}$.

$$(f - \alpha \mathrm{Id}) \circ (f - \beta \mathrm{Id}) = f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta \mathrm{Id}$$
$$= \big(\lambda - \alpha - \beta\big)f + \alpha\beta \mathrm{Id}$$

En choisissant $\beta = \lambda - \alpha$, alors on a $\beta \neq 0$ et $(f - \alpha \mathrm{Id}) \circ (f - \beta \mathrm{Id}) = \alpha\beta \mathrm{Id}$.

On pose alors $g = \dfrac{1}{\alpha\beta}\big(f - \beta \mathrm{Id}\big)$.

D'après ce qui précède, on a : $(f - \alpha \mathrm{Id}) \circ g = \mathrm{Id}$.

On vérifie également que $g \circ (f - \alpha \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.

On en déduit que $(f - \alpha \mathrm{Id})$ **est un automorphisme** et $(f - \alpha \mathrm{Id})^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\beta}\big(f - \beta \mathrm{Id}\big)$ avec $\beta = \lambda - \alpha$,

$\boxed{\text{c'est-à-dire : } (f - \alpha \mathrm{Id})^{-1} = \dfrac{1}{\alpha(\lambda - \alpha)}\big(f + (\alpha - \lambda)\mathrm{Id}\big)}$

---

13. **Exercice 13 :**

Problématique : comment définir g et p ?

On ne va pas définir g et p en précisant le résultat de $g(x)$ et de $p(x)$ pour $x \in E$, mais en indiquant les images des éléments d'une base pour ces deux applications.

On s'appuie en effet sur le théorème suivant :

> Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, et si $\mathcal{F} = (y_1, ..., y_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors il existe un unique endomorphisme g tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]\quad g(e_i) = y_i$.
>
> On a de plus les équivalences suivante :
>
> g est injective $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est libre
> g est surjective $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est génératrice de E
> g est bijective $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est une base de E

Solution :

On note $r = \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Soit $(e_1, ..., e_r)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Alors $(e_1, ..., e_r)$ est une famille libre de E, on la complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_r, e_{r+1}, .., e_n)$ de E.

On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), ..., f(e_r), f(e_{r+1}), .., f(e_n)) = \mathrm{Vect}(f(e_{r+1}), .., f(e_n))$ car $f(e_1) = ... = f(e_r) = 0$.

Ainsi, $(f(e_{r+1}), .., f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ à $n - r$ éléments.

Or d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - r$.

Par conséquent, $(f(e_{r+1}), .., f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc en particulier est libre.

On la complète en une base $\mathcal{B}' = (y_1, ..., y_r, f(e_{r+1}), .., f(e_n))$ de E.

Il existe un endomorphisme p de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]\quad p(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq r \\ e_i & \text{sinon} \end{cases}$

Il existe un endomorphisme g de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]\quad g(e_i) = \begin{cases} y_i & \text{si } i \leq r \\ f(e_i) & \text{sinon} \end{cases}$

Il reste à prouver que g et p conviennent.

• <u>p est un projecteur :</u>

Si $i \leq r$, on a $p^2(e_i) = p(p(e_i)) = p(0) = 0 = p(e_i)$.
Et si $i > r$, alors $p^2(e_i) = p(p(e_i)) = p(e_i)$.
Les endomorphismes p^2 et p prennent les mêmes valeurs sur la base $\mathcal{B}$, donc sont égaux : p est donc un projecteur.

• <u>g est un automorphisme :</u>

Comme g transforme la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$ de E, g est un automorphisme.

• <u>$f = g \circ p$:</u>

Si $i \leq r$, on a : $(g \circ p)(e_i) = g(p(e_i)) = g(0) = 0$ et $f(e_i) = 0$.
Et si $i > r$, on a : $(g \circ p)(e_i) = g(p(e_i)) = g(e_i) = f(e_i)$.

Ainsi, les endomorphismes $g \circ p$ et f prennent les mêmes valeurs sur la base $\mathcal{B}$, donc sont égaux.

<u>Complément : étude d'un exemple :</u>

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (y, x + z, y)$.

Il est aisé de prouver que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1)$ avec $e_1 = (1, 0, -1)$.

On note $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$: la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une famille libre à 3 éléments de $\mathbb{R}^3$, donc forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.
On complète cette famille libre $((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ en une base $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0))$ de $\mathbb{R}^3$.

On définit l'endomorphisme p par $p(e_1) = 0$, $p(e_2) = e_2$ et $p(e_3) = e_3$.
On utilise la relation linéaire $(x, y, z) = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + (z + x) \cdot e_3$ pour obtenir l'expression analytique de p :

$$p(x, y, z) = x \cdot p(e_1) + y \cdot p(e_2) + (z + x) \cdot p(e_3) = y \cdot e_2 + (z + x) \cdot e_3 = (0, y, x + z)$$

On définit l'endomorphisme g par $g(e_1) = (1, 0, 0)$, $g(e_2) = (1, 0, 1)$ et $g(e_3) = (0, 1, 0)$.
L'expression analytique de g est alors :

$$g(x, y, z) = x \cdot g(e_1) + y \cdot g(e_2) + (z + x) \cdot g(e_3) = (x, 0, 0) + (y, 0, y) + (0, x + z, 0) = (x + y, x + z, y)$$

Il est facile de vérifier que $p^2 = p$ et que g est bijectif.
Et : $g(p(x, y, z)) = g(0, y, x + z) = (y, x + z, y) = f(x, y, z)$.
