Exercice 1 : étude d'une fonction (16 pts)

1. La fonction δ est impaire, il suffit d'étudier son signe sur $\mathbb{R}_+$.

   Méthode 1 :
   - pour $t \in]1, +\infty[$, $t > 1$ et $\sin(t) \geq -1$, donc $\delta(t) > 0$.
   - pour $t \in]0, 1]$, $t > 0$ et $\sin(t) > 0$, donc $\delta(t) > 0$.
   - $\delta(0) = 0$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \delta(t) \text{ et } t \text{ ont le même signe, et l'équation } \delta(t) = 0 \text{ admet une unique solution : } t = 0.}$ **1.75 pt**

   Méthode 2 :

   Soit $a \in]0, +\infty[$.
   La fonction δ est dérivable sur $[0, a]$ et $\forall t \in [0, a] \quad \delta'(t) = 1 + \cos(t) \geq 0$ et s'annule en un nombre fini de points.
   Par conséquent, la fonction δ est strictement croissante sur $[0, a]$, d'où $\delta(a) > \delta(0) = 0$.
   On a ainsi prouvé que : $\forall a \in]0, +\infty[$, $\delta(a) > 0$.

2. Pour $x > 0$, la fonction ψ est continue sur $[x, 2x]$, donc l'intégrale $f(x)$ est bien définie.

   Pour $x < 0$, la fonction ψ est continue sur $[2x, x]$, donc l'intégrale $f(x)$ est bien définie. **1 pt**

3. Le changement de variable $u = -t$ donne $f(x) = -\displaystyle\int_{-x}^{-2x} \psi(-u)\mathrm{d}u = \int_{-x}^{-2x} \psi(u)\mathrm{d}u = f(-x)$ (car la fonction ψ est impaire). **f est donc paire.** **1 pt**

4. La fonction ψ est continue sur $]0, +\infty[$ donc admet une primitive F, et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = F(2x) - F(x)$.
   F étant de classe C^1, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$,
   et $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \dfrac{2}{2x + \sin(2x)} - \dfrac{1}{x + \sin(x)}$. **1.5 pt**

5. On a :
   $$f'(x) = \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{\delta(2x)\delta(x)} = \frac{2\sin(x)(1 - \cos(x))}{\delta(2x)\delta(x)}$$

   Pour $x > 0$, $\delta(2x) > 0$, $\delta(x) > 0$ et $1 - \cos(x) \geq 0$: le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $\sin(x)$.

   La fonction f est donc croissante sur chaque intervalle du type $]2k\pi, (2k+1)\pi]$ (où $k \in \mathbb{N}$), et décroissante sur chaque intervalle du type $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ (où $k \in \mathbb{N}$). **1.5 pt**

6. (a) $f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_x^{2x} \Big(\frac{1}{t + \sin(t)} - \frac{1}{t}\Big)\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)\mathrm{d}t}{t(t + \sin t)}$,

   d'où : $\left|f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leq \int_x^{2x} \frac{|\sin(t)|\mathrm{d}t}{t(t + \sin t)}$ par l'inégalité triangulaire et la positivité de $t(t + \sin(t))$

   Comme $\forall t \in [x, 2x]$, $\dfrac{|\sin(t)|}{t(t + \sin t)} \leq \dfrac{1}{t(t + \sin t)}$, on obtient (par croissance de l'intégrale) :

   $$\boxed{\left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t(t + \sin t)}}$$ **1.5 pt**

   (b) $m = 2$ **convient.** En effet, pour $t \geq 2$, on a $t + \sin(t) \geq t - 1 \geq \dfrac{t}{2}$. **1 pt**

   (c) On a : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2)$, et pour $x > m$, on a : $\forall t \in [x, 2x]$, $t + \sin(t) \geq \dfrac{t}{2}$,

   donc $\dfrac{1}{t(t + \sin(t))} \leq \dfrac{2}{t^2}$, puis $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t(t + \sin(t))} \leq \int_x^{2x} \frac{2\mathrm{d}t}{t^2}$.

   Or $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{2\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{2}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{x}$

   On a ainsi : $\forall x \in]m, +\infty[, \quad |f(x) - \ln 2| \leq \dfrac{1}{x}$.

   Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\boxed{\text{on en déduit que } f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 2}$ **1.5 pt**

7. (a) $t+\sin(t) \underset{0}{=} 2t - \dfrac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)$, d'où :

$$\psi(t) \underset{0}{=} \frac{1}{2t} \times \frac{1}{1-\frac{t^2}{12}+\mathrm{o}(t^2)} \underset{0}{=} \frac{1}{2t} \times \left[1+\frac{t^2}{12}+\mathrm{o}(t^2)\right] \underset{0}{=} \frac{1}{2t}+\frac{t}{24}+\mathrm{o}(t) \quad \textbf{1 pt}$$

(b) La fonction θ est définie sur $\mathbb{R}^*$. **0.25 pt**

(c) D'après la question 7(a), on a $\theta(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{24}$, donc $\theta(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.
La fonction θ se prolonge par continuité en 0 en posant $\theta(0)=0$. **0.5 pt**

(d) La fonction θ ainsi prolongée en 0 est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive G sur $\mathbb{R}$:
$\displaystyle\int_x^{2x} \theta(t)\mathrm{d}t = G(2x)-G(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} G(0)-G(0)=0.$ **1 pt**

(e) On a alors $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \theta(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_x^{2x}\theta(t)\mathrm{d}t + \frac{\ln(2)}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\ln(2)}{2}$. **1 pt**

(f) f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=\frac{\ln(2)}{2}$.

$$f'(x) = \frac{2\sin(x)(1-\cos(x))}{\delta(2x)\delta(x)} \underset{0}{\sim} \frac{2\times x\times\frac{x^2}{2}}{4x\times 2x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{8} \quad \text{donc } f'(x) \underset{x\to 0}{=\longrightarrow} 0$$

- f est continue sur $\mathbb{R}$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) \underset{x\to 0}{=\longrightarrow} 0$

$\boxed{\text{D'après le théorème de la limite de la dérivée, } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0)=0}$ **1.5 pt**

Exercice 2 : comparaison de deux protocoles (10.25 pts)

I. Premier protocole

Barème : Q1 : 2 pts	Q2 : 1.5 pt	Q3 : 0.75 pt

1. Notons C_i l'événement : "la $i^{\text{ème}}$ carte découverte n'est pas un roi rouge"
Et R_i l'événement : "la $i^{\text{ème}}$ carte découverte est un roi rouge".
On a : $\Big\{X=k\Big\} = C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_{k-1} \cap R_k$
D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(C_1)\times P(C_2\,|\,C_1)\times ...\times P(C_{k-1}\,|\,C_1\cap C_2\cap...\cap C_{k-2})\times P(R_k\,|\,C_1\cap C_2\cap ...\cap C_{k-1})\\
&= \frac{2n-2}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-1}\times ...\times\frac{2n-k}{2n-(k-2)}\times\frac{2}{2n-(k-1)}\\
&= \frac{(2n-2)(2n-3)\times ...\times(2n-k)\times 2}{(2n)(2n-1)...(2n-k+2)(2n-k+1)}\\
&= \frac{(2n-k)\times 2}{(2n)(2n-1)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } P(X=k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}}$

2.
$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} kP(X=k)\\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{2n-1} k(2n-k)\\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\Big(2n\sum_{k=1}^{2n-1}k - \sum_{k=1}^{2n-1}k^2\Big)\\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\Big(2n\times\frac{(2n-1)\times 2n}{2} - \frac{(2n-1)\times 2n\times(4n-1)}{6}\Big)\\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\times\frac{n(2n-1)\big[6n-(4n-1)\big]}{3}\\
&= \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}$$

3. La variable aléatoire G_1 vérifie la relation : $G_1 = a - X$.
Par linéarité de l'espérance, $\boxed{E(G_1) = a - E(X) = a - \dfrac{2n+1}{3}}$

II. Deuxième protocole

Barème :	Q1 : 0.5 pt	Q2 : 1.5 pt	Q3 : 2.5 pts

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

   On a : $\Big\{G_2 = a - k\Big\} = \Big\{X = k\Big\}$, donc d'après la partie I, $\boxed{P(G_2 = k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}}$

2. $G_2(\Omega) = \Big\{a-1, a-2, ..., a-n, -n\Big\}$ et $\displaystyle\sum_{g \in G_2(\Omega)} P(G_2 = g) = 1$

   D'où
$$\begin{aligned}
P(G_2 = -n) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} P(G_2 = a-k) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-k}{n(2n-1)} \\
&= 1 - \frac{2}{2n-1}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= 1 - \frac{2n}{2n-1} + \frac{1}{n(2n-1)} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2(2n-1) - 4n + (n+1)}{2(2n-1)} \\
&= \frac{n-1}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
E(G_2) &= \sum_{g \in G_2(\Omega)} gP(G_2 = g) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a-k)P(G_2 = a-k) - nP(G_2 = -n) \\
&= a\sum_{k=1}^{n} P(G_2 = a-k) - \sum_{k=1}^{n} kP(G_2 = a-k) - nP(G_2 = -n)
\end{aligned}$$

   Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(G_2 = a-k) = 1 - P(G_2 = -n) = 1 - \frac{n-1}{2(2n-1)} = \frac{3n-1}{2(2n-1)}$

   Et
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kP(G_2 = a-k) &= \frac{1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{n} k(2n-k) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\Big(2n\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2\Big) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\Big(2n \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \times \frac{n(n+1)\Big[6n - (2n+1)\Big]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(4n-1)}{6(2n-1)}
\end{aligned}$$

   D'où
$$\begin{aligned}
E(G_3) &= a \times \frac{3n-1}{2(2n-1)} - \frac{(n+1)(4n-1)}{6(2n-1)} - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \\
&= \frac{3(3n-1)a - \Big[(n+1)(4n-1) + 3n(n-1)\Big]}{6(2n-1)}
\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Ainsi, } E(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}}$

III. Comparaison des deux protocoles (1.5 pt)

Avec $n = 16$, on a $E(G_1) = a - 11$ et $E(G_2) = \dfrac{141a - 1791}{186} = \dfrac{47a - 597}{62}$

On étudie le signe de la différence $E(G_1) - E(G_2)$ pour avoir quel protocole est le plus profitable au joueur :

$$E(G_1) - E(G_2) = \frac{15a - 85}{62}$$

On a donc : $E(G_1) - E(G_2) > 0 \iff 15a - 85 > 0$

$$\iff a > \frac{17}{3}$$

$\boxed{\text{Si } a \geq 6\text{, le premier protocole est préférable, et si } a \leq 5\text{, le deuxième protocole est préférable}}$

Remarques et commentaires :

Le premier jeu d'argent est profitable au joueur dès lors que $a \geq 12$ et est équilibré lorsque $a = 11$.
Si $a \leq 10$, cela ne vaut pas le coup pour le joueur d'essayer de gagner les a euros selon le premier protocole, puisque en moyenne, il perdra plus d'argent qu'il n'en gagne.

Le deuxième jeu d'argent est profitable au joueur dès lors que $a \geq 13$.
Avec le deuxième protocole, les pertes sont limitées à 16 euros, mais on préfère continuer à joueur suivant le premier protocole (sauf si $a \leq 5$), car quand on n'a pas trouvé un roi rouge après avoir retourné la moitié du paquet, la probabilité d'en trouver un aux prochaines cartes a considérablement augmenté, et cela vaut le coup de tenter sa chance et payer un ou plusieurs euros pour remporter la cagnotte de a euros.
Lorsque $a \leq 5$, ce n'est plus le cas, le montant de la cagnotte est trop faible pour que ça vaille le coup de tenter sa chance, et il vaut mieux accepter sa perte de 16 euros plutôt que de continuer de jouer. Il est préférable même de ne pas jouer du tout.

Exercice 3 : urne rétrécissante (13.75 pts)

Barème :					
	Q1a : 0.5 pt	Q1b : 0.25 pt	Q2a : 0.25 pt	Q2b : 0.75 pt	Q3a : 0.25 pt
	Q3b : 0.75 pt	Q3c : 1.5 pt	Q3d : 1.25 pt	Q3e : 2.5 pts	Q3f : 0.75 pt
	Q4a : 0.75 pt	Q4b : 1.75 pt	Q4c : 1.75 pt	Q4d : 0.75 pt	

1. (a) X_n prend des valeurs entières, et il y a au minimum un tirage : $X_n \geq 1$.
Comme on retire au moins une boule à chaque tirage, on en fait au maximum n, et donc $X_n \leq n$.
$\boxed{X_n \text{ prend bien ses valeurs dans } [\![1, n]\!]}$.

(b) L'événement $\left\{X_n = 1\right\}$ consiste à tirer la boule numéro 1 dans l'urne U_n qui contient n boules,
$\boxed{\text{donc } P(X_n = 1) = \frac{1}{n}}$

2. (a) X_1 ne peut prendre que la valeur 1 : $\boxed{X_1(\Omega) = \{1\} \text{ et } P(X_1 = 1) = 1}$

(b) $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
On a vu à la question 1 que $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$, et $P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$
$E(X_2) = P(X_2 = 1) + 2P(X_2 = 2) = \frac{3}{2}$.
$E(X_2^2) = P(X_2 = 1) + 4P(X_2 = 2) = \frac{5}{2}$ et $V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$.

3. (a) Y_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

(b) Lorsque la première boule tirée est le numéro k, il reste les boules numérotées de 1 à $k-1$ dans l'urne.
La probabilité de tirer la boule 1 au bout de j tirages sachant que la première boule tirée est la numéro k est donc la probabilité de tirer la boule 1 au bout de $j-1$ tirages dans l'urne U_{k-1}.
$\boxed{\text{D'où } P(X_n = j \mid Y_n = k) = P(X_{k-1} = j - 1)}$

(c) Puisque $(Y_n = k)_{1 \leq k \leq n}$ forme un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j \mid Y_n = k) P(Y_n = k)$$

Or $P(Y_n = k) = \frac{1}{n}$ et $P(X_n = j \mid Y_n = 1) = 0$

(lorsqu'on tire la boule 1 au premier tirage, on n'effectue qu'un seul tirage)

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} P(X_n = j \mid Y_n = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} P(X_{k-1} = j - 1) \qquad \textit{(en utilisant le résultat de la question précédente)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1) \qquad \textit{(changement d'indices)}$$

(d) Pour $j=1$, on a : $nP(X_n=1)=1$ et $(n-1)P(X_{n-1}=1)+P(X_{n-1}=0)=1$.
La relation est bien vérifiée.

Supposons désormais $j \in [\![1,n]\!]$.
D'après la question précédente (*qu'on applique aux entiers n et $n-1$*) :

$$nP(X_n=j)=\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k=j-1) \text{ et } (n-1)P(X_{n-1}=j)=\sum_{k=1}^{n-2} P(X_k=j-1)$$

$\boxed{\text{D'où } nP(X_n=j)-(n-1)P(X_{n-1}=j)=P(X_{n-1}=j-1)}$

(e)
$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{j=1}^{n} jP(X_n=j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} j\Big(\frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=j)+\frac{1}{n}P(X_{n-1}=j-1)\Big) \qquad \textit{d'après la question précédente} \\ &= \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} jP(X_{n-1}=j)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} jP(X_{n-1}=j-1) \\ &= \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(X_{n-1}=j)+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} jP(X_{n-1}=j-1) \qquad \textit{car } P(X_{n-1}=n)=0 \textit{ et } P(X_{n-1}=0)=0 \end{aligned}$$

On reconnaît dans la première somme l'espérance de X_{n-1} et, par un changement d'indices,

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \frac{n-1}{n}E(X_{n-1})+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(j+1)P(X_{n-1}=j) \\ &= \frac{n-1}{n}E(X_{n-1})+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(X_{n-1}=j)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1}=j) \end{aligned}$$

On reconnaît à nouveau l'espérance de X_{n-1} dans la première somme et la seconde somme vaut 1 puisque X_{n-1} prend ses valeurs dans $[\![1,n-1]\!]$.

$$\boxed{E(X_n)=E(X_{n-1})+\frac{1}{n}}$$

(f) $E(X_n)=\sum_{k=2}^{n}\big(E(X_k)-E(X_{k-1})\big)+E(X_1)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

On peut aussi procéder par récurrence.

4. (a) La boule n ne peut être obtenue que lors du premier tirage : $P(Z_n^{(n)}=1)=\frac{1}{n}$.

$\boxed{Z_n^{(n)} \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{n}}$

L'expérience s'arrête lorsqu'on tire la boule 1 : la boule 1 est obligatoirement tirée.

$\boxed{Z_1^{(n)} \text{ est la variable constante égale à 1}}$

(b) On utilise (comme à la question 3c) le système complet d'événements $(Y_n=k)_{1\le k\le n}$ et la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Z_i^{(n)}=1) &= \sum_{k=1}^{n} P(Z_i^{(n)}=1 \mid Y_n=k)\,P(Y_n=k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{i} P(Z_i^{(n)}=1 \mid Y_n=k)+\frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n} P(Z_i^{(n)}=1 \mid Y_n=k) \end{aligned}$$

- Si $Y_n=k$ et $k<i$, alors on retire toutes les boules dont le numéro est supérieur à k.
En particulier, la boule i est retirée et on ne peut plus l'obtenir : $P(Z_i^{(n)}=1 \mid Y_n=k)=0$
- Si $Y_n=i$, alors on a eu la boule i dès le premier tirage : $P(Z_i^{(n)}=1 \mid Y_n=1)=1$
- Si $Y_n=k$ et $k>i$, alors on continue l'expérience avec les boules dont le numéro est inférieur à $k-1$.
La probabilité d'obtenir la boule i lors des prochains tirages est alors égale à $P(Z_i^{(k-1)}=1)$.
$P(Z_i^{(n)}=1 \mid Y_n=k)=P(Z_i^{(k-1)}=1)$

$$\boxed{\text{On déduit ainsi : } P(Z_i^{(n)}=1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n}P(Z_i^{(k-1)}=1)}$$

(c) Soit $\mathcal{P}_k$ la proposition : « pour tout i de $[\![1,k]\!]$, $Z_i^{(k)}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$ »
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.
Supposons que, pour un entier $n\geq 3$, les propositions $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, ..., $\mathcal{P}_{n-1}$ soient vraies
(*on procède par récurrence forte*)
$Z_n^{(n)}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$,
Pour $i\in[\![1,n-1]\!]$, $P(Z_i^{(n)}=1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n}P(Z_i^{(k-1)}=1)$
Or par hypothèse, pour tout $k\in[\![i+1,n]\!]$, $\mathcal{P}_{k-1}$ est vraie.
$Z_i^{(k-1)}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$: $P(Z_i^{(k-1)}=1)=\frac{1}{i}$

$$\begin{aligned}P(Z_i^{(n)}=1)&=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n}\frac{1}{i}\\&=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times\frac{n-i}{i}\\&=\frac{1}{i}\end{aligned}$$

On a ainsi vérifié que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, $Z_i^{(n)}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$: $\mathcal{P}_n$ est vraie.

(d) La somme $\sum_{i=1}^{n}Z_i^{(n)}$ correspond au nombre total de boules obtenues (tous numéros confondus).

$\boxed{\text{D'où : }\sum_{i=1}^{n}Z_i^{(n)}=X_n}$ Par linéarité de l'espérance, $E(X_n)=\sum_{i=1}^{n}E\big(Z_i^{(n)}\big)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$

CORRECTION DE L'EXERCICE 25 DU TD 222 : IRRATIONALITÉ DE π (*niveau 4*)

1. $P_n(x)=\frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$.

   • P_n est une fonction polynomiale de degré $2n$, donc pour tout entier $k>2n$, $P_n^{(k)}$ est la fonction nulle.
   Pour $k>2n$, $P_n^{(k)}(0)=P_n^{(k)}\big(\frac{a}{b}\big)=0$.

   • 0 et $\frac{a}{b}$ sont des racines de multiplicité n du polynôme P_n.
   Donc, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(0)=P_n^{(k)}\big(\frac{a}{b}\big)=0$.

   • D'après la formule de Taylor, le coefficient c_k de degré k du polynôme P_n vérifie : $c_k=\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$
   Utilisons la formule du binôme pour déterminer les coefficients du polynôme P_n :
   $P_n(x)=\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^kx^k(-1)^{n-k}a^{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}\binom{n}{k-n}b^{k-n}x^k(-1)^{2n-k}a^{2n-k}$ (*après changement d'indices*)
   On en déduit que, pour tout $k\in[\![n,2n]\!]$, $c_k=\frac{1}{n!}\binom{n}{k-n}b^{k-n}(-1)^{2n-k}a^{2n-k}$
   D'où $P^{(k)}(0)=k!\,c_k=\frac{k!}{n!}\binom{n}{k-n}b^{k-n}(-1)^{2n-k}a^{2n-k}$
   Comme $k\geq n$, $\frac{k!}{n!}$ est un entier naturel. a et b étant des entiers naturels, on a donc : $P^{(k)}(0)\in\mathbb{Z}$.

   • On a : $P_n\big(\frac{a}{b}-x\big)=\frac{1}{n!}\big(\frac{a}{b}-x\big)^n(-bx)^n=\frac{1}{n!}(bx-a)^nx^n=P_n(x)$
   En dérivant k fois cette relation, on a : $(-1)^kP_n^{(k)}\big(\frac{a}{b}-x\big)=P_n^{(k)}(x)$.
   En évaluant en 0, on obtient : $(-1)^kP_n^{(k)}\big(\frac{a}{b}\big)=P_n^{(k)}(0)$, et donc $P_n^{(k)}\big(\frac{a}{b}\big)\in\mathbb{Z}$.

   $\boxed{\text{On a ainsi montré que } \forall k\in\mathbb{N}\quad P^{(k)}(0)\in\mathbb{Z}\text{ et }P_n^{(k)}\big(\tfrac{a}{b}\big)\in\mathbb{Z}}$

2. $\left|\int_0^{\pi}P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^{\pi}\Big|P_n(t)\sin(t)\Big|\mathrm{d}t$

Or $\forall t \in [0,\pi] \quad \Big|P_n(t)\sin(t)\Big| = \dfrac{1}{n!} t^n |bt-a|^n \sin(t)$

La fonction $t \mapsto |bt-a|$ est continue sur le segment $[0,\pi]$, donc admet un maximum M.

On obtient alors : $\forall t \in [0,\pi] \quad \Big|P_n(t)\sin(t)\Big| \leq \dfrac{1}{n!}\pi^n M^n$

Donc $\displaystyle\int_0^\pi \Big|P_n(t)\sin(t)\Big|\mathrm{d}t \leq \int_0^\pi \frac{1}{n!}\pi^n M^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\pi^{n+1}M^n$

Comme $(\pi M)^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(n!\big)$, alors $\dfrac{\pi(\pi M)^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que } I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

3. Effectuons une première intégration par parties :
$I_n = \Big[-P_n(t)\cos(t)\Big]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t = P_n(\pi) + P_n(0) + \int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t$
Effectuons une nouvelle intégration par parties :
$\displaystyle\int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \Big[P_n'(t)\sin(t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)\mathrm{d}t = -\int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)\mathrm{d}t$
En combinant les deux résultats, on obtient : $\displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)\mathrm{d}t = P_n(\pi) + P_n(0)$

Avec un calcul similaire, on montre le résultat plus général :
$\displaystyle\int_0^\pi P_n^{(2k)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi P_n^{(2k+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t = P_n^{(2k)}(\pi) + P_n^{(2k)}(0)$
On peut alors faire la somme alternée de ces résultats :
$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \Big[\int_0^\pi P_n^{(2k)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi P_n^{(2k+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t\Big] = \sum_{k=0}^n (-1)^k \Big[P_n^{(2k)}(\pi) + P_n^{(2k)}(0)\Big]$$
La somme de gauche est une somme télescopique :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (-1)^k \Big[\int_0^\pi P_n^{(2k)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi P_n^{(2k+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t\Big] &= \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^\pi P_n^{(2n+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t \\ &= I_n \quad \textit{car la dérivée d'ordre } 2n+2 \textit{ de } P_n \textit{ est la fonction nulle}\end{aligned}$$
On rappelle que par hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$.
$$I_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \Big[P_n^{(2k)}\Big(\frac{a}{b}\Big) + P_n^{(2k)}(0)\Big]$$
D'après la question 1, $P_n^{(2k)}(\frac{a}{b})$ et $P_n^{(2k)}(0)$ sont des entiers relatifs. $\boxed{\text{Par conséquent, } I_n \in \mathbb{Z}}$

$I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc à partir d'un certain rang N, $|I_n| \leq \dfrac{1}{2}$.
De plus, $I_n \in \mathbb{Z}$.
On en déduit que $\forall n \geq N$, $I_n = 0 \qquad$ *car* $\mathbb{Z} \cap \Big[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big] = \Big\{0\Big\}$
Or, $\forall t \in [0,\pi]$, $\dfrac{t^n}{n!} \geq 0$ et $bt - a \leq b\pi - a = 0$.
Par conséquent, la fonction $t \mapsto P_n(t)\sin(t)$ est **continue**, **de signe constant** et **non nulle**.
Donc $I_n \neq 0$. **Contradiction**

$\boxed{\pi \text{ est irrationnel}}$

Commentaires : cette preuve de l'irrationnalité de π est due à Ivan Niven (publiée en 1947). Il existe bien d'autres preuves de l'irrationnalité de π : Lambert est le premier à avoir démontré ce résultat dans les années 1760.

CORRECTION DE L'EXERCICE 41 DU TD 222 : INTÉGRALE DE POISSON (*niveau 3*)

1. On constate que $1 - 2x\cos(\theta) + x^2 = (x-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$ est toujours positif et est nul si et seulement si $\sin\theta = 0$ et $x - \cos\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = k\pi$ et $x = \cos k\pi = (-1)^k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).
Lorsque $|x| \neq 1$, il en résulte que la fonction $\theta \mapsto \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$ est définie et continue sur $[0,\pi]$, **ce qui justifie que $I(x)$ est bien définie.**

2. $I(-x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 + 2x\cos(\theta) + x^2)\mathrm{d}\theta$.
Effectuons le changement de variables $\varphi = \pi - \theta$:
$I(-x) = \displaystyle\int_\pi^0 \ln(1 + 2x\cos(\pi - \varphi) + x^2) \times (-\mathrm{d}\varphi) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(\varphi) + x^2)\mathrm{d}\varphi = I(x)$

$\boxed{\text{La fonction } I \text{ est paire}}$

3. Les racines de $X^{2n}-1$ sont les racines $2n$-ièmes de l'unité :
$$1,\ -1,\ e^{ki\pi/n},\ e^{-ki\pi/n} \text{ (avec } 1\leq k\leq n-1)$$
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad x^{2n}-1=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left[(x-e^{ki\pi/n})(x-e^{-ki\pi/n})\right]=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)$$

4. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Notons : $S_n=\dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)$ et $R_n=\dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)$

• S_n est une somme de Riemann associée à la fonction $\theta\mapsto\ln(1-2x\cos\theta+x^2)$ sur $[0,\pi]$,
Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(x)$.

• D'autre part, $S_n=\dfrac{\pi}{n}\ln(1-2x+x^2)+R_n=\ln(1-2x+x^2)+\dfrac{\pi}{n}\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\right)$

En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient : $S_n=\dfrac{\pi}{n}\left[\ln((1-x)^2)+\ln\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right)\right]$

Si $x\in]-1,1[$, alors $x^{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc $\ln\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$.
On en déduit que $S_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
L'unicité de la limite permet de déduire que $I(x)=0$.

Si $x>1$, alors $S_n=\dfrac{\pi}{n}\left[\ln((1-x)^2)+\ln(x^{2n})+\ln\left(\dfrac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{x^2-1}\right)\right]=2\pi\ln(x)+\dfrac{\pi}{n}\left[\ln((1-x)^2)+\ln\left(\dfrac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{x^2-1}\right)\right]$
On en déduit que $S_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}2\pi\ln(x)$.
L'unicité de la limite permet de déduire que $I(x)=2\pi\ln(x)$.

Si $x<-1$, alors par parité, on obtient que $I(x)=I(-x)=2\pi\ln(-x)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } I(x)=2\pi\ln(|x|) \text{ si } |x|>1 \text{ et } I(x)=0 \text{ si } |x|<1}$

CORRECTION D' EXERCICES SUR L'UNIFORME CONTINUITÉ (*niveau 4*)

Exercice 2a :

Supposons par l'absurde que f soit uniformément continue.

Il existe $\alpha>0$ tel que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x-y|\leq\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leq1$.

Pour tout entier n supérieur à $\dfrac{1}{\alpha^2}$, on a : $(2n\pi+\frac{1}{\sqrt{n}})-2n\pi\leq\alpha$,

donc $\left|f(2n\pi+\frac{1}{\sqrt{n}})-f(2n\pi)\right|\leq1$, ce qui donne $(2n\pi+\frac{1}{\sqrt{n}})\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})\leq1$.

Or $(2n\pi+\frac{1}{\sqrt{n}})\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{n}\pi$, donc $(2n\pi+\frac{1}{\sqrt{n}})\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Ce qui est **contradictoire** avec la suite de terme général $(2n\pi+\frac{1}{\sqrt{n}})\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est majorée.

Exercice 2d :

Raisonnement par l'absurde : même méthode qu'au a, considérer les points n^2 et $n^2+\frac{1}{n}$ par exemple.

Exercice 4 :

Soit $\varepsilon>0$.
$f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}l$, donc il existe $A\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall x\in[A,+\infty[$, $|f(x)-l|\leq\dfrac{\varepsilon}{4}$.
f est continue sur le segment $[0,A]$, donc d'après le théorème de Heine, est uniformément continue sur $[0,A]$:
il existe $\alpha>0$ tel que $\forall(x,y)\in[0,A]^2$, $|x-y|\leq\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^+$ tel que $|x-y|\leq\alpha$ (on peut supposer de plus que $x\leq y$) .
<u>Cas 1 :</u> Si $x\in[0,A]$ et $y\in[0,A]$, alors $|f(x)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon$.
<u>Cas 2 :</u> Si $x\in[A,+\infty[$ et $y\in[A,+\infty[$, alors $|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-l|+|f(y)-l|\leq\dfrac{\varepsilon}{4}+\dfrac{\varepsilon}{4}\leq\varepsilon$.
<u>Cas 3 :</u> Si $x\in[0,A]$ et $y\in[A,+\infty[$, alors $|f(x)-f(A)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$ et $|f(A)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$ (cf cas 2)
Par conséquent, $|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(A)|+|f(A)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Exercice 6 :

f est uniformément continue, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Notons $n = \lfloor x/\alpha \rfloor$. On a donc $n \leq \frac{x}{\alpha} \leq n+1$ ou encore $n\alpha \leq x \leq (n+1)\alpha$.

On a : $f(x) - f(0) = f(x) - f(n\alpha) + f(n\alpha) - f((n-1)\alpha) + ... + f(\alpha) - f(0)$.

Donc : $|f(x)-f(0)| \leq |f(x)-f(n\alpha)| + |f(n\alpha) - f((n-1)\alpha)| + ... + |f(\alpha)-f(0)| \leq (n+1)$.

Par conséquent, $|f(x)| \leq |f(x)-f(0)| + |f(0)| \leq (n+1) + |f(0)| \leq \frac{x}{\alpha} + 1 + |f(0)|$.

Il suffit de poser $a = \frac{1}{\alpha}$ et $b = |f(0)|$.

Il reste à étudier le cas où $x < 0$ ....

CORRECTION DE L'EXERCICE 21 DU TD 22

1. • Supposons que f soit positive, alors $f = |f|$, par conséquent $\int_a^b f = \int_a^b |f|$.
   Comme $\int_a^b f \geq 0$ (positivité de l'intégrale), on a $|\int_a^b f| = \int_a^b f$.

   • Supposons que f soit négative, alors $f = -|f|$, par conséquent $\int_a^b f = -\int_a^b |f|$.
   Comme $\int_a^b f \leq 0$, on a $|\int_a^b f| = -\int_a^b f$.

   • Supposons que $|\int_a^b f| = \int_a^b |f|$.
   Si $\int_a^b f \geq 0$, alors on a $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ ou encore $\int_a^b (|f| - f) = 0$.
   $|f| - f$ est une fonction positive, continue, d'intégrale nulle, donc $|f| - f = 0$ et f est ainsi positive.

   Si $\int_a^b f \leq 0$, alors on a $-\int_a^b f = \int_a^b |f|$ ou encore $\int_a^b (|f| + f) = 0$.
   $|f| + f$ est une fonction positive, continue, d'intégrale nulle, donc $|f| + f = 0$ et f est ainsi négative.

2. • Supposons qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta}|f|$.
   Alors $\int_a^b f = e^{i\theta} \int_a^b |f|$, et donc $|\int_a^b f| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1} \times |\int_a^b |f|| = \int_a^b |f|$ car $\int_a^b |f| \geq 0$.

   • Supposons que $|\int_a^b f| = \int_a^b |f|$ (*partie plus difficile*)
   On peut écrire : $\int_a^b f = re^{i\theta}$ avec $r = |\int_a^b f|$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Considérons alors $g : t \mapsto f(t)e^{-i\theta}$.
   On a $\int_a^b g = |\int_a^b f| \in \mathbb{R}$, donc $\int_a^b g = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$.
   Or $|g| = |f|$, l'hypothèse de départ donne alors $\int_a^b |g| = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$, puis $\int_a^b (|g| - \mathrm{Re}(g)) = 0$.
   La fonction $|g| - \mathrm{Re}(g)$ est continue, positive, d'intégrale nulle, donc $|g| - \mathrm{Re}(g) = 0$.
   On en déduit que $\mathrm{Im}(g) = 0$, et que $g = \mathrm{Re}(g) = |g| = |f|$.
   Ainsi, $fe^{-i\theta} = |f|$.
