Programme de colle pour la semaine du 13 mai

mathématiques MPSI : semaine 26

---

1. **Espérance d'une variable aléatoire :** $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

   Relation : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$.
   Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
   Espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale.
   Espérance d'une variable suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$
   Formule de transfert.
   $E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y)$
   Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
   Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes, alors $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$.

2. Moments d'une variable aléatoires. $E(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x)$.

   Variance d'une variable aléatoire : $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
   Relation : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Relation : $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
   Covariance de deux variables aléatoires.
   Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. <u>Rappel :</u> $E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y)$
   Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
   Relations entre variance et covariance. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.
   Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables indépendantes ou décorrélées.
   Variance d'une variable aléatoire de bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale.
   Coefficient de corrélation.

3. **Inégalités probabilistes**
   Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

4. **Formes linéaires et hyperplans**
   Toute forme linéaire non nulle est surjective.
   Hyperplan : définition.
   En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.
   Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E = H \oplus D$.
   Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.
   Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.
   Si E est un espace de dimension n, l'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n - p$.
   Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

5. **Sous-espaces affines d'un espace vectoriel**
   Points et vecteurs (présentation informelle).
   Direction d'un sous-espace affine. Hyperplan affine.
   Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: équation d'un plan affine de$\mathbb{R}^3$, système d'équations d'une droite affine de $\mathbb{R}^3$.
   Parallélisme. Intersection de sous-espaces affines. Translation.
   Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$ d'inconnue x est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par Ker u.
   Repère affine, coordonnées.