PROGRAMME DE COLLE POUR LA SEMAINE DU 27 MAI

MATHÉMATIQUES MPSI : SEMAINE 28

---

1. **Matrices : révision**
   - Matrice d'une application linéaire dans des bases
   - Application linéaire canoniquement associée à une matrice
   - Matrices équivalentes et rang
2. **Matrices semblables et trace**
   Linéarité de la trace. $\mathrm{tr}(AB)$ =$\mathrm{tr}(BA)$.
   Trace d'un endomorphisme. Trace d'un projecteur.
3. **Groupe symétrique :**
   Groupe des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Ordre d'une permutation.
   Cycle, transposition.
   Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité.
   Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.
   Signature d'une permutation.

Questions de cours :

— Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

— Soit σ une permutation de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}$.

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille de n vecteurs de E.
Montrer l'équivalence : $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$
