1. **Présentation des copies :**

- Laisser une marge à gauche d'au moins 4 cm.
- Numéroter les feuilles des copies rendues.
- Ne pas réécrire le sujet sur la copie.
- Limiter l'usage du blanco ou d'autre correcteur.
- **Mettre en évidence les résultats définitifs.**

2. **Conduite d'une démonstration :**

- **Ne pas partir du résultat à prouver.**

L'objectif d'une démonstration est de parvenir au résultat souhaité (par des inférences déductives).

- **Articuler les raisonnements** : on ne doit pas remplacer les articulations logiques "donc", "alors", "par conséquent" par le symbole $\Longrightarrow$ ou le symbole $\Longleftrightarrow$.

- **Maîtriser l'usage du symbole $\Longleftrightarrow$.**

On utilise le symbole $\Longleftrightarrow$ pour

- la résolution d'équations ou d'inéquations par équivalences
- la preuve que deux propositions sont équivalentes
- la recherche de conditions pour qu'une proposition soit vraie

---

Exercice 1 : calculs et raisonnement (10 pts)

1. *On procède ici à une récurrence de pas double.*

- Soit $P(n)$: « $u_n = n!$ »
- $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
- On suppose $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un entier $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+1)(u_n + u_{n+1}) \\ &= (n+1) \times \Big[n! + (n+1)!\Big] \qquad \text{d'après } P(n) \text{ et } P(n+1) \\ &= (n+1) \times \Big[n! + (n+1) \times n!\Big] \\ &= (n+1) \times n! \times (1 + n + 1) \\ &= (n+2)! \end{aligned}$$

$P(n+2)$ est vraie.

$\boxed{\text{On a ainsi montré par récurrence que, pour tout entier naturel } n,\ u_n = n!}$ **(2 pts)**

2.(a) • Soit $P(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$ »

- $P(2)$ est vraie.
- Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 2$.

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{(n+1)n}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)n} \qquad \text{d'après } P(n)\\
&= 1 - \frac{((n+1)-1}{(n+1)n}\\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$P(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\text{On a ainsi montré par récurrence que, pour tout entier } n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} \quad \textbf{(1.5 pt)}}$$

Remarque : on peut également faire apparaître une somme télescopique en tenant compte de la relation $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

(b) *On cherche un lien entre les deux sommes :* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

On remarque que la deuxième somme comprend un terme de plus, et qu'à partir de $k = 2$*, les termes sont plus petits que ceux de la première somme.*

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Or, pour $k \in [\![2, n]\!]$, $\quad k^2 \geq k(k-1)$, donc $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$.

En sommant ces inégalités, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

Ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$.

En remarquant que $1 - \dfrac{1}{n} \leq 1$, on obtient finalement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

$$\boxed{\text{On a ainsi montré que, pour tout entier } n \geq 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2} \quad \textbf{(1.5 pt)}$$

3.(a) Soit $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tan(t)} - \frac{2}{\tan(2t)} &= \frac{1}{\tan(t)} - \frac{2\big(1 - \tan^2(t)\big)}{2\tan(t)} \qquad \textit{en utilisant la formule de duplication}\\
&= \frac{1 - 1 + \tan^2(t)}{\tan(t)}\\
&= \tan(t)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\qquad \tan(t) = \frac{1}{\tan(t)} - \frac{2}{\tan(2t)}} \quad \textbf{(1.25 pt)}$$

(b) On applique le résultat précédent au réel $\dfrac{x}{2^k}$ (qui est bien un élément de $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$)

$$\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k \tan\left(\frac{x}{2^k}\right)} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}$$

$$\boxed{\text{Par télescopage, on obtient : } S_n = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{1}{\tan(x)}} \quad \textbf{(1.25 pt)}$$

4. $\boxed{\text{pour } x \neq 1,\ \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}}$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{j-i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{2^j}{2^i} \right) = \sum_{j=1}^{n} 2^j \left(\sum_{i=1}^{j} \left(\frac{1}{2}\right)^i \right)$$

Or : $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{j+1}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^j}$

D'où : $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{j-i} = \sum_{j=1}^{n} \left(2^j - 1\right)$

$$= \sum_{j=1}^{n} 2^j - \sum_{j=1}^{n} 1$$

$$= 2^{n+1} - 2 - n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{j-i} = 2^{n+1} - 2 - n} \quad \textbf{(2.5 pts)}$$

Exercice 2 : une formule d'intégration (3 pts)

1. $$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a + 2b + 3c = 4 \\ a + 4b + 9c = \frac{26}{3} \\ a + 8b + 27c = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 2 & \\ b + 2c = 2 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ 3b + 8c = \frac{20}{3} & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ 7b + 26c = 18 & L_4 \longleftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 2 & \\ b + 2c = 2 & \\ 2c = \frac{2}{3} & L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2 \\ 12c = 4 & L_4 \longleftarrow L_4 - 7L_2 \end{cases}$$

la ligne 4 du dernier système est proportionnelle à la ligne 3

$$\iff \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{3} \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le système } (S) \text{ admet donc une unique solution : le triplet } \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \textbf{(2.25 pts)}}$$

2. On applique la formule d'intégration à la fonction polynomiale P définie par $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$:

$$\boxed{\int_1^3 (x^3 - 5x^2 + 6x)\mathrm{d}x = \frac{P(1) + 4P(2) + P(3)}{3} = \frac{2}{3} \quad \textbf{(0.75 pt)}} \qquad P(1) = 2,\ P(2) = P(3) = 0$$

Exercice 3 : coefficients binomiaux et sommes (8 pts)

1. (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)\,k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

Et $\displaystyle \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)\,(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$

$$\boxed{\text{D'où } \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}} \quad \textbf{(1 pt)}$$

(b) En tenant compte de la relation précédente et en opérant un changement d'indice, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}2^{k}\binom{n+1}{k}$$

Or d'après la formule du binôme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}2^{k}\binom{n+1}{k} = 3^{n+1}$

Et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}2^{k}\binom{n+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1}2^{k}\binom{n+1}{k}$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}2^{k}\binom{n+1}{k} = 3^{n+1} - 1$

$$\boxed{\text{Par conséquent, } \sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}} \quad \textbf{(2 pts)}$$

2. (a) $\displaystyle S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}2^{k}\binom{2n+2-k}{n+1}$

D'après la relation de Pascal, on a : $\displaystyle\binom{2n+2-k}{n+1} = \binom{2n+1-k}{n} + \binom{2n+1-k}{n+1}$

D'où $\displaystyle S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}2^{k}\binom{2n+1-k}{n} + \sum_{k=0}^{n+1}2^{k}\binom{2n+1-k}{n+1}$

Commençons par décomposer la première somme en isolant le premier terme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}2^{k}\binom{2n+1-k}{n} &= \binom{2n+1}{n} + \sum_{k=1}^{n+1}2^{k}\binom{2n+1-k}{n} \\
&= \binom{2n+1}{n} + \sum_{k=0}^{n}2^{k+1}\binom{2n-k}{n} \quad \textit{(en effectuant un changement d'indice)} \\
&= \binom{2n+1}{n} + 2\sum_{k=0}^{n}2^{k}\binom{2n-k}{n} \\
&= \binom{2n+1}{n} + 2S_n
\end{aligned}$$

Décomposons ensuite la deuxième somme en isolant le dernier terme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}2^{k}\binom{2n+1-k}{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}2^{k}\binom{2n+1-k}{n+1} + \underbrace{2^{n+1}\binom{n}{n+1}}_{=0} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}\binom{2n+2-k}{n+1} \quad \textit{(en effectuant un changement d'indice)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}2^{k}\binom{2n+2-k}{n+1} \quad \textit{(il manque le terme pour } k=0 \textit{ pour retrouver } S_{n+1}\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(S_{n+1} - \binom{2n+2}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a ainsi montré que } S_{n+1} = 2S_n + \binom{2n+1}{n} + \frac{1}{2}S_{n+1} - \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}} \quad \textbf{(3 pts)}$$

(b) $\dfrac{1}{2}\dbinom{2n+2}{n+1} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(2n+2)\times(2n+1)!}{(n+1)\times n!(n+1)!} = \dfrac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \dbinom{2n+1}{n}$

La relation précédente se simplifie donc et on obtient : $S_{n+1} = 2S_n + \dfrac{1}{2}S_{n+1}$,

Ce qui donne : $\boxed{S_{n+1} = 4S_n}$ **(1 pt)**

La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison 4.
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 4^n S_0$.
Comme $S_0 = 1$, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 4^n}$ **(1 pt)**

Exercice 4 : trigonométrie (7.5 pts)

1. Méthode 1 : la fonction f est dérivable et $f'(x) = -2x + \lambda$.

   $f'(x)$ s'annule donc pour $x = \dfrac{\lambda}{2}$, est négatif pour $x \in \left[\dfrac{\lambda}{2}, +\infty\right[$ et est positif pour $x \in \left]-\infty, \dfrac{\lambda}{2}\right]$.

   On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{\lambda}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

   f présente un maximum en $\dfrac{\lambda}{2}$ et $f\left(\dfrac{\lambda}{2}\right) = 2 - \dfrac{\lambda^2}{4} + \dfrac{\lambda^2}{2} = 2 + \dfrac{\lambda^2}{4}$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 2 + \dfrac{\lambda^2}{4}}$ **(1.5 pt)**

   Méthode 2 : on montre que la différence $2 + \dfrac{\lambda^2}{4} - \big(2 - x^2 + \lambda x\big)$ est positive.

$$\begin{aligned} 2 + \frac{\lambda^2}{4} - \big(2 - x^2 + \lambda x\big) &= x^2 - \lambda x + \frac{\lambda^2}{4} \\ &= \left(x - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 2 + \dfrac{\lambda^2}{4}}$

2. Méthode 1 :
   On utilise les formules de linéarisation :
   $\sin^2(b) + \sin^2(c) = \dfrac{1-\cos(2b)}{2} + \dfrac{1-\cos(2c)}{2} = 1 - \dfrac{\cos(2b)+\cos(2c)}{2}$
   Or $\cos(2b) + \cos(2c) = 2\cos(b+c)\cos(b-c)$ *transformation d'une somme en produit*

   $\boxed{\text{On en déduit que : } \sin^2(b) + \sin^2(c) = 1 - \cos(b+c)\cos(b-c)}$ **(1.25 pt)**

   Méthode 2 : utilisons les formules d'addition

$$\begin{aligned} 1 - \cos(b+c)\cos(b-c) &= 1 - \Big(\cos(b)\cos(c) - \sin(b)\sin(c)\Big) \times \Big(\cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\Big) \\ &= 1 - \cos^2(b)\cos^2(c) + \sin^2(b)\sin^2(c) \\ &= 1 - \Big(1 - \sin^2(b)\Big) \times \Big(1 - \sin^2(c)\Big) + \sin^2(b)\sin^2(c) \\ &= \sin^2(b) + \sin^2(c) \end{aligned}$$

3. En tenant compte du résultat précédent et de la relation fondamentale $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$, on obtient :
   $S = 2 - \cos^2(a) - \cos(b+c)\cos(b-c)$.
   Or $a + b + c = \pi$, d'où $\cos(b+c) = \cos(\pi - a) = -\cos(a)$.

   $\boxed{\text{Par conséquent, } S = 2 - \cos^2(a) + \cos(b-c)\cos(a)}$ **(1.25 pt)**

4. On utilise le résultat préliminaire (avec $\lambda = \cos(b-c)$ et $x = \cos(a)$).

   On obtient : $\boxed{S \leq 2 + \dfrac{\cos^2(b-c)}{4}}$

   Comme $\cos(b-c) \in [-1, 1]$, alors $\cos^2(b-c) \leq 1$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } S \leq 2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{4}}$ **(1 pt)**

5. **Supposons $S = \dfrac{9}{4}$.**

   D'après la question 3, $S \leq 2 + \dfrac{\cos^2(b-c)}{4}$.
   On en déduit que $1 \leq \cos^2(b-c)$.
   Comme de plus, $\cos^2(b-c) \leq 1$, alors $\cos^2(b-c) = 1$.
   Donc $\cos(b-c) = 1$ ou $\cos(b-c) = -1$.

   On sait également que $0 < b < \pi$ et $-\pi < -c < 0$, donc $b - c \in]-\pi, \pi[$.
   Il est donc exclu que $\cos(b-c)$ soit égal à -1.
   Ainsi, $\cos(b-c) = 1$ et donc $b - c = 0$.

   On a alors $S = \dfrac{9}{4}$ et $S = 2 - \cos^2(a) + \cos(a)$,
   Ce qui donne : $\cos^2(a) - \cos(a) + \dfrac{1}{4} = 0$, ou encore $\left(\cos(a) - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$.
   Par conséquent, $\cos(a) = \dfrac{1}{2}$, donc $a = \dfrac{\pi}{3}$ (car $a \in]0, \pi[$).
   Comme $b = c$ et $\dfrac{\pi}{3} + b + c = \pi$, il vient : $b = c = \dfrac{\pi}{3}$.

   $\boxed{\text{On a ainsi prouvé que si } S = \dfrac{9}{4} \text{, alors } a = b = c = \dfrac{\pi}{3}}$ **(2.5 pts)**

Exercice 5 : suite de Sylvester (5 pts)

1. $\boxed{s_1 = 3,\ s_2 = 1 + 2 \times 3 = 7 \text{ et } s_3 = 1 + 2 \times 3 \times 7 = 43}$ **(0.5 pt)**

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $s_{n+1} = 1 + s_n \times \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} s_k\right)$

   Or on a : $s_n = 1 + \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} s_k$ (cette relation est également vraie lorsque $n = 0$ vu que $s_0 = 2$)

   $\boxed{\text{On obtient alors : } s_{n+1} = 1 + s_n \times (s_n - 1) = s_n^2 - s_n + 1}$ **(1.25 point)**

3. $s_{n+1} - s_n = s_n^2 - 2s_n + 1 = (s_n - 1)^2 \geq 0$
   Ainsi, $s_{n+1} \geq s_n$: $\boxed{\text{la suite est croissante}}$ **(0.75 point)**

4. On note que $s_{n+1} - 1 = s_n(s_n - 1)$.
   D'où $\dfrac{1}{s_n - 1} - \dfrac{1}{s_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{s_n - 1} - \dfrac{1}{s_n(s_n - 1)} = \dfrac{s_n - 1}{s_n(s_n - 1)} = \dfrac{1}{s_n}$. **(1 point)**

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{s_k - 1} - \frac{1}{s_{k+1} - 1}\right) = \frac{1}{s_0 - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{s_{n+1} - 1}$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k} = -\frac{1}{s_{n+1} - 1}}$ **(0.75 pt)**

6. On applique la relation précédente avec $n = 3$, on obtient :
   $$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1 - \frac{1}{s_4 - 1}$$
   Or $s_4 - 1 = 2 \times 3 \times 7 \times 43 = 1806$.

   $\boxed{\text{D'où : } 1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{43} + \dfrac{1}{1806}}$ **(0.75 pt)**