Exercice 1 : minoration (4.5 pts)

1. Forme trigonométrique : $\boxed{a = \sqrt{2}e^{i\pi/4}}$

   En utilisant la formule de Moivre, on obtient : $\boxed{a^5 = 4\sqrt{2}e^{5i\pi/4}}$

   On en déduit : $\mathrm{Im}(a^5) = 4\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4$. $\boxed{\text{Ainsi, } Q(a) = -4}$ **(1.25 pt)**

2. (a) D'après la formule du binôme, $z^5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(iy)^k x^{5-k}$

   pour k pair, les termes de la somme sont réels et pour k impair, les termes sont imaginaires purs

   $\boxed{\text{D'où } \mathrm{Im}(z^5) = 5yx^4 - 10y^3x^2 + y^5}$

   (b) $Q(z) = \dfrac{5yx^4 - 10y^3x^2 + y^5}{y^5} = 5\dfrac{x^4}{y^4} - 10\dfrac{x^2}{y^2} + 1$

   $\boxed{\text{Ainsi, } Q(z) = 5\,t^4 - 10\,t^2 + 1}$ **(1.5 pt)**

3. $Q(z) = 5\Big[t^4 - 2t^2 + \dfrac{1}{5}\Big] = 5\Big[(t^2-1)^2 - \dfrac{4}{5}\Big] = 5(t^2-1)^2 - 4$

   Comme $5(t^2-1)^2 \geq 0$, on obtient ainsi $\boxed{Q(z) \geq -4}$

   Il y a égalité si et seulement si $\dfrac{x^2}{y^2} = 1$

   si et seulement si $x^2 = y^2$

   si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$

   $\boxed{\text{Il y a égalité si et seulement si } \big|\mathrm{Re}(z)\big| = \big|\mathrm{Im}(z)\big|}$ **(1.75 pt)**

Exercice 2 : équations algébriques (10 pts)

1. (a) On résout cette équation par équivalences :

   $$2\,z^2 = z + 1 \iff 2\,z^2 - z - 1 = 0$$
   $$\iff (z-1)(2z+1) = 0$$

   $\boxed{\text{L'équation admet deux solutions : } 1 \text{ et } -\frac{1}{2}}$ **(0.75 pt)**

   (b) L'expression polynomiale $3z^2 - z^2 - z - 1$ s'annule pour $z = 1$.

   On peut donc factoriser par $(z-1)$ et on obtient : $3z^2 - z^2 - z - 1 = (z-1)(3z^2 + 2z + 1)$.

   $3z^2 + 2z + 1$ a un discriminant égal à -12 et s'annule pour $z = \dfrac{-1 - i\sqrt{2}}{3}$ et pour $z = \dfrac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$.

   On a ainsi les équivalence suivantes :

   $$2\,z^3 = z^2 + z + 1 \iff (z-1)(3z^2 + 2z + 1) = 0$$
   $$\iff z = 1 \text{ ou } z = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3} \text{ ou } z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$$

   $\boxed{\text{L'équation a ainsi trois solutions : } 1,\ \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3} \text{ et } \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}}$

   Les deux solutions non réelles de l'équation étant conjuguées, elles ont le même module.

   $$\left|\frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}\right| = \frac{|-1 + i\sqrt{2}|}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

   $\boxed{\text{Il y a une solution de module 1 et deux solutions de module } \frac{\sqrt{3}}{3}}$ **(2 pts)**

2. Supposons $|z| > 1$ et montrons que z n'est pas solution de l'équation (E_p).

   D'après l'inégalité triangulaire, $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} z^k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} |z^k|$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}|z^k| = 1+|z|+|z|^2+\cdots+|z|^{p-1}$

Et comme $|z|>1$, alors pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]\quad |z|^k<|z|^p$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}|z|^k<\sum_{k=0}^{p-1}|z|^p=p|z|^p$.

Par conséquent, $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{p-1}z^k\right|<p|z|^p$

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}z^k$ ne peut donc pas être égal au nombre complexe pz^p vu que leurs modules sont différents.

Ce qui prouve que z n'est pas solution de l'équation (E_p).

$\boxed{\text{On a ainsi montré (par contraposition) que si } z \text{ est solution de l'équation } (E_p)\text{, alors } |z|\leq 1}$ **(2.5 pts)**

3. (a) Par hypothèse, on a : $\displaystyle p\,z^p=\sum_{k=0}^{p-1}z^k$

Comme $z=e^{i\theta}$, alors $p\,z^p=p\,e^{ip\theta}$

$$\text{Et } \sum_{k=0}^{p-1}z^k=\frac{z^p-1}{z-1}\qquad (\text{car } z\neq 1)$$
$$=\frac{e^{ip\theta}-1}{e^{i\theta}-1}$$

Or $e^{ip\theta}-1=e^{\frac{ip\theta}{2}}\left(e^{\frac{ip\theta}{2}}-e^{-\frac{ip\theta}{2}}\right)=e^{\frac{ip\theta}{2}}\times 2i\,\sin\left(\dfrac{p\theta}{2}\right)$

Et $e^{i\theta}-1=e^{\frac{i\theta}{2}}\times 2i\,\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

On obtient alors : $p\,e^{ip\theta}=\dfrac{e^{\frac{ip\theta}{2}}\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Ce qui donne : $e^{ip\theta}\times\dfrac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{ip\theta}{2}}}=\dfrac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Comme $e^{ip\theta}\times\dfrac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{ip\theta}{2}}}=e^{i(p\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{p\theta}{2})}=e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}$, $\boxed{\text{alors } e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}=\dfrac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$ **(2.5 pts)**

(b) En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires de la relation précédente, on obtient :

$$\cos\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\quad(1)\quad\text{et}\quad\sin\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right)=0\quad(2)$$

$$\text{Or }\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{(p+1)\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\sin\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\qquad\text{d'après les formules d'addition}$$
$$=-\cos\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\qquad\text{en tenant compte de (2)}$$

La relation (1) donne alors : $\cos\left(\dfrac{(p+1)\theta}{2}\right)=-\dfrac{\cos\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right)}{p}$

Comme $\sin\left(\dfrac{(p+1)\theta}{2}\right)=0$, alors $\cos\left(\dfrac{(p+1)\theta}{2}\right)\neq 0$ (*puisque pour tout réel* t , $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$)

En simplifiant par $\cos\left(\dfrac{(p+1)\theta}{2}\right)$, on obtient $1=-\dfrac{1}{p}$, c'est-à-dire $p=-1$. **Contradiction.** **(2.25 pts)**

Exercice 3 : étude d'applications (7 pts)

1. (a) <u>Injectivité :</u>

f est dérivable et $\forall x\in\mathbb{R}_+\quad f'(x)=2x+2>0$.

La fonction f est strictement croissante, donc injective.

<u>Autre méthode :</u>

Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^2$ tel que $f(x_1)=f(x_2)$.

$$x_1^2-x_2^2+2(x_1-x_2)=0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = 0$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0$$

Comme x_1 et x_2 sont positifs, alors $x_1 + x_2 + 2 \neq 0$.
Par conséquent, $x_1 = x_2$.

Surjectivité :
Soit $y \in \mathbb{R}_+$.
On pose $x = \sqrt{y+1} - 1$.

Alors $x \in \mathbb{R}^+$ et
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{y+1} - 1\right)^2 + 2\left(\sqrt{y+1} - 1\right) \\ &= y + 1 - 2\sqrt{y+1} + 1 + 2\sqrt{y+1} + 2 \\ &= y \end{aligned}$$

f est donc surjective.

f est bijective, et l'application f^{-1} associe au nombre y son unique antécédent $x = \sqrt{y+1} - 1$.

f^{-1} est donc l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$	**(2 pts)**

Autre raisonnement :

Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On s'intéresse à l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.
$$f(x) = y \iff x^2 + 2x - y = 0$$
Cette équation du second degré a pour discriminant : $\Delta = 4 + 4y$.
Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: les nombres $-1 + \sqrt{y+1}$ et $-1 - \sqrt{y+1}$.
Seul le nombre $-1 + \sqrt{y+1}$ est positif.
Par conséquent, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que f est bijective et f^{-1} est l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$$

(b) *On cherche un lien entre les fonctions f et g.*
On remarque que $g(x) = f(\sqrt{x})$.

On introduit la fonction h de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad h(x) = \sqrt{x}$.
h est bijective et $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad h^{-1}(x) = x^2$
On note que $g = f \circ h$ est la composée de deux bijections.

$\boxed{\text{Donc } g \text{ est bijective et } g^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g^{-1}(x) = \left(f^{-1}(x)\right)^2 = \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g^{-1}(x) = x + 2 - 2\sqrt{x+1}}$ **(1.25 pt)**

2. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On résout l'équation $F(x, y) = (a, b)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} F(x,y) = (a,b) &\iff \begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + 3y = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = a \\ -y = b - 2a \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = a - 2(2a - b) \\ y = 2a - b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -3a + 2b \\ y = 2a - b \end{cases} \end{aligned}$$
L'équation admet un unique couple solution.

L'application F est donc bijective et l'application F^{-1} est définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad F^{-1}(x, y) = (-3x + 2y, 2x - y)$	**(2 pts)**

(b) Comme $G(2, 0) = G(0, 1)$, **l'application G n'est pas injective.** **(0.5 pt)**

(c) Montrons que le couple $(0, 2)$ n'admet pas d'antécédent par G.
Supposons par l'absurde qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $G(x, y) = (0, 2)$.

On a alors : $\begin{cases} x + 2y = 0 & (1) \\ xy = 2 & (2) \end{cases}$

On déduit de la relation (1) que $x = -2y$.

On reporte dans la relation (2) : $-2y^2 = 2$, ce que donne $y^2 = -1$.
Contradiction.
$\boxed{\text{L'application } G \text{ n'est pas surjective}}$ **(1.25 pt)**

Exercice 4 : nombres complexes et géométrie plane (8 pts)

1. (a) *Méthode 1 :*

Il suffit de vérifier que les longueurs M_1M_2, M_1M_3 et M_2M_3 sont égales :

$M_1M_2 = |jz - z| = |j-1|\,|z|$

$M_1M_3 = |j^2z - z| = |j^2 - 1|\,|z| = |j-1|\,|z|$ car $j-1$ et j^2-1 sont conjugués.

$M_2M_3 = |j^2z - jz| = |j|\,|j-1|\,|z| = |j-1|\,|z|$ car $|j| = 1$.

on n'a pas eu besoin de calculer les modules ...

Méthode 2 :

On a : $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \dfrac{j^2z - jz}{z - jz} = \dfrac{j(j-1)}{1-j} = -j = e^{-i\pi/3}$

On en déduit que $M_2M_1 = M_2M_3$ et $(\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M_3}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ \ [2\pi]$

$\boxed{\text{Le triangle } M_1M_2M_3 \text{ est donc équilatéral}}$ **(1.25 pt)**

(b) $OM_1 = |z|$, $OM_2 = |jz| = |j|\,|z| = |z|$ et $OM_3 = |j^2z| = |j^2|\,|z| = |z|$

$\boxed{\text{Les points } M_1,\ M_2 \text{ et } M_3 \text{ appartiennent au cercle de centre } O \text{ et de rayon } |z|}$ **(0.75 pts)**

(c) On cherche les conditions sur z pour que $OM_4 = |z|$.

Méthode 1 : on pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$-1 - z = (-1 - x) - iy$, donc $|-1 - z|^2 = (-1-x)^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2 + 2x + 1$ et $|z|^2 = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned}
\text{le point } M_4 \text{ appartient au cercle } \mathcal{C} &\iff OM_4^2 = |z|^2 && \textit{les modules sont positifs}\\
&\iff x^2 + y^2 + 2x + 1 = x^2 + y^2\\
&\iff x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
\text{le point } M_4 \text{ appartient au cercle } \mathcal{C} &\iff OM_4^2 = |z|^2 && \textit{les modules sont positifs}\\
&\iff (-1 - z)(-1 - \overline{z}) = z\overline{z}\\
&\iff z + \overline{z} + 1 = 0\\
&\iff \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} && \text{car } z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il faut et il suffit que } \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \text{ pour que le point } M_4 \text{ appartienne aussi au cercle } \mathcal{C}}$ **(1.75 pt)**

2. On pose $Z = \dfrac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} = \dfrac{-1 - z - jz}{j^2z - jz}$.

D'après le cours, les points M_2, M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si Z est un nombre réel.

En utilisant la relation $-1 - j = j^2$, on a : $Z = \dfrac{j^2z - 1}{(j^2 - j)z}$ et $\overline{Z} = \dfrac{j\overline{z} - 1}{(j - j^2)\overline{z}}$

On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}
M_2,\ M_3 \text{ et } M_4 \text{ sont alignés} &\iff Z = \overline{Z}\\
&\iff \frac{j^2z - 1}{j(j-1)z} = \frac{j\overline{z} - 1}{j(1-j)\overline{z}}\\
&\iff (j^2z - 1)(1 - j)\overline{z} = (j\overline{z} - 1)(j - 1)z\\
&\iff (1 - j)\Big[j^2z\overline{z} - \overline{z}\Big] = (j - 1)\Big[jz\overline{z} - z\Big]\\
&\iff j^2z\overline{z} - \overline{z} = -jz\overline{z} + z && \textit{en simplifiant par } 1 - j\\
&\iff \underbrace{(1 + j^2)}_{=-1}z\overline{z} - \overline{z} - z = 0\\
&\iff z\overline{z} + \overline{z} + z = 0
\end{aligned}$$

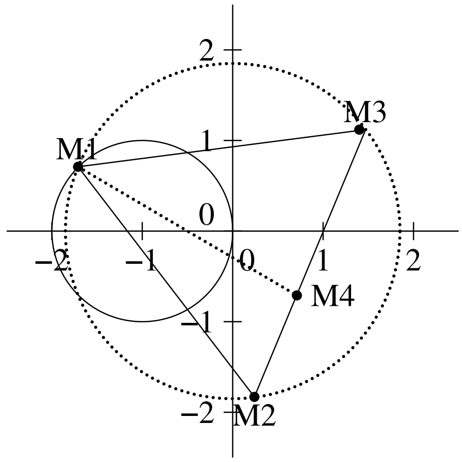
$$\begin{aligned}
&\iff z\overline{z}+\overline{z}+z+1=1\\
&\iff (z+1)(\overline{z}+1)=1\\
&\iff |z+1|^2=1\\
&\iff |z+1|=1 \qquad\qquad \text{car } |z+1|\geq 0. \quad \textbf{(2.5 pts)}
\end{aligned}$$

<u>Construction géométrique :</u> **(1.75 pt)**

On choisit un point M_1 dont l'affixe z vérifie la relation $|z+1|=1$: le point M_1 appartient donc au cercle de centre Ω d'affixe -1 et de centre 1.

On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OM_1 : les points M_2 et M_3 appartiennent à ce cercle, et sont tels que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Pour construire le point M_4, on remarque que le milieu du segment $[M_1M_4]$ a pour affixe $a=\dfrac{z-1-z}{2}=\dfrac{-1}{2}$.



3. *<u>Question difficile :</u>*

D'après l'inégalité triangulaire, $|z+1|\geq |z|-1=2$.

Par conséquent, $|z+1|\neq 1$. Les points M_2, M_3 et M_4 ne sont pas alignés.

Il existe donc un unique cercle qui passe par ces trois points (son centre est le point d'intersection des trois médiatrices).

Notons Ω le centre de ce cercle et ω son affixe.

Les points O, M_1 et Ω sont à égales distances de M_2 et M_3 : ils appartiennent donc à la médiatrice de $[M_2M_3]$.

Les points O, M_1 et Ω sont donc alignés.

Notons θ un argument de z : $z=3e^{i\theta}$.

On en déduit que $\omega=ke^{i\theta}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

On détermine la valeur de k à partir de la relation $\Omega M_2^2=\Omega M_4^2$:

$\Omega M_2^2=\left|3je^{i\theta}-ke^{i\theta}\right|^2=\left|3j-k\right|^2\left|e^{i\theta}\right|^2=\left|\left(-\dfrac{3}{2}-k\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\right|^2$

D'où $\Omega M_2^2=\left(-\dfrac{3}{2}-k\right)^2+\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=9+3k+k^2$

Et $\Omega M_4^2=\left|-1-3e^{i\theta}-ke^{i\theta}\right|^2=\left|\Big(1+3\cos(\theta)+k\cos(\theta)\Big)+\Big(3\sin(\theta)+k\sin(\theta)\Big)i\right|^2$

deux nombre complexes opposés ont le même module

$$\begin{aligned}
\text{D'où } \Omega M_4^2 &= \Big(1+3\cos(\theta)+k\cos(\theta)\Big)^2+\Big(3\sin(\theta)+k\sin(\theta)\Big)^2\\
&=1+(6+2k)\cos(\theta)+(3+k)^2\big(\underbrace{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}_{=1}\big)\\
&=10+6\cos(\theta)+(2\cos(\theta)+6)k+k^2.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la relation : $10+6\cos(\theta)+(2\cos(\theta)+6)k+k^2=9+3k+k^2$

Ce qui donne : $(3+2\cos(\theta))k=-(1+6\cos(\theta))$

Ainsi, $k=-\dfrac{1+6\cos(\theta)}{3+2\cos(\theta)}$

Le cercle passant par les points M_2, M_3 et M_4 a pour centre le point Ω d'affixe $ke^{i\theta}$ et pour rayon $\sqrt{9+3k+k^2}$ où $k=-\dfrac{1+6\cos(\theta)}{3+2\cos(\theta)}$

Exercice : la méthode de Cardan

1. (a) L'équation $X^2 - zX - \frac{p}{3} = 0$ est une équation du second degré, **donc elle admet deux solutions complexes u et v** (éventuellement confondues).

   Les liens entre racines et coefficients d'une équation du second degré nous disent alors que $u + v = z$ et $uv = -\frac{p}{3}$.

   (b) On a : $u^3v^3 = (uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$, donc $\boxed{u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}}$

   Ensuite : $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$,

   Donc $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = z^3 + pz$.

   Comme z est solution de (E), on a $z^3 + pz = -q$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } u^3 + v^3 = -q}$

   (c) D'après le cours, u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation $X^2 - (u^3 + v^3)X + u^3v^3 = 0$, c'est-à-dire de l'équation (E').

   (d) On utilise le fait que $u^3 + v^3 = -q$, $uv = -\frac{p}{3}$, $j^3 = 1$, $j^4 = j$ et $j^5 = j^2$.

$$\begin{aligned}(ju + j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q &= u^3 + 3ju^2v + 3j^2uv^2 + v^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= 3uv(ju + j^2v) + p(ju + j^2v) \quad \text{car } u^3 + v^3 = -q \\ &= 0 \quad \text{car } 3uv = -p\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Ainsi, } ju + j^2v \text{ est une solution de l'équation } (E)}$

$$\begin{aligned}(j^2u + jv)^3 + p(j^2u + jv) + q &= u^3 + 3j^2u^2v + 3juv^2 + v^3 + p(j^2u + jv) + q \\ &= 3uv(j^2u + jv) + p(j^2u + jv) \quad \text{car } u^3 + v^3 = -q \\ &= 0 \quad \text{car } 3uv = -p\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Ainsi, } j^2u + jv \text{ est une solution de l'équation } (E)}$

2. Avec les notations de l'énoncé, $p = 6$ et $q = -2$. L'équation (E') est alors $X^2 - 2X - 8 = 0$

   Le discriminant de (E') vaut : $\Delta = 36$.

   L'équation (E') a donc deux racines réelles : 4 et -2.

   $u = \sqrt[3]{4}$ et $v = -\sqrt[3]{2}$ sont respectivement des racines cubiques de 4 et -2 et vérifient : $uv = -\sqrt[3]{8} = -2 = -\frac{p}{3}$.

   $\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont alors les nombres : } \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2},\ j\sqrt[3]{4} - j^2\sqrt[3]{2} \text{ et } j^2\sqrt[3]{4} - j\sqrt[3]{2}}$