MATHÉMATIQUES MPSI : SEMAINE 6

PROGRAMME DE COLLE POUR LA SEMAINE DU 4 NOVEMBRE

1. **Révision : Bijection et bijection réciproque**
   Théorème de la bijection. Graphe d'une bijection réciproque.
   Théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque.

2. **Fonctions usuelles**
   Fonction logarithme népérien, fonction exponentielle. Fonction puissance d'exposant réel.
   Fonctions circulaires : cos, sin, tan.
   Fonctions circulaires réciproques : arcsin, arccos, arctan.
   Fonctions hyperboliques : ch, sh, th.

QUESTION DE COURS

1. fonction ln
2. fonction exp (*la fonction exp est définie comme la bijection réciproque de ln*)
3. fonction puissance d'exposant $a > 0$
4. fonction tan
5. fonction arcsin
6. fonction arccos
7. fonction arctan
8. fonctions ch et sh
9. fonction th

Les élèves doivent rappeler la définition et les propriétés, et tracer la courbe représentative (en indiquant les pentes des tangentes aux points remarquables). Je leur ai donné le modèle de quelques fonctions.

• La fonction ln est définie comme étant la primitive qui s'annule en 1 de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

• ln est une fonction dérivable et $\forall x \in]0, +\infty[\quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

• ln est une fonction strictement croissante

• **Signe de $\ln(x)$:** $\forall x \in]0, 1[\quad \ln(x) < 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[\quad \ln(x) > 0$

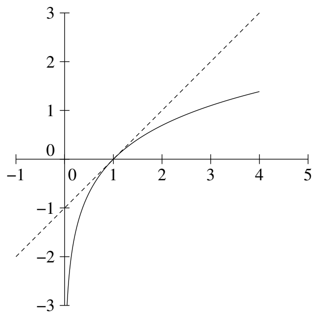
$\ln(x)$ *est du signe de* $(x - 1)$

• $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

• Le théorème de la bijection assure que ln est bijective.

• La fonction ln vérifie certaines propriétés opératoires :
La relation $\ln(x^n) = n \ln(x)$ valable pour $n \in \mathbb{Z}$ est étendue à tout exposant réel $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$

• **Inégalité remarquable :** $\forall x \in]0, +\infty[\quad \ln(x) \leq x - 1 \qquad \forall t \in]-1, +\infty[\quad \ln(1 + t) \leq t$



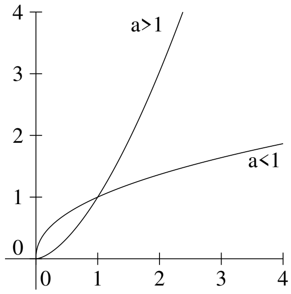
Fonctions puissances d'exposant a strictement positif

- On définit la fonction f_a sur $]0,+\infty[$ par $f_a(x) = x^a = \exp(a\ln(x))$.
- f_a est une fonction dérivable et $\forall x \in]0,+\infty[\quad f'_a(x) = ax^{a-1}$
- f_a est une fonction strictement croissante
- $\lim\limits_{x\to 0} f_a(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_a(x) = +\infty$

On prolonge la fonction f_a par continuité en 0 en posant $f_a(0) = 0$

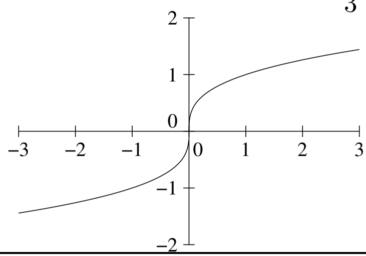
La fonction f_a est désormais définie sur $[0,+\infty[$

- **Dérivabilité de f_a en 0 :** *on étudie le comportement limite de* $\dfrac{f_a(x) - f_a(0)}{x}$
  - si $a \in]0,1[$, alors f_a n'est pas dérivable en 0.
  - si $a \in]1,+\infty[$, alors f_a est dérivable en 0 et $f'_a(0) = 0$



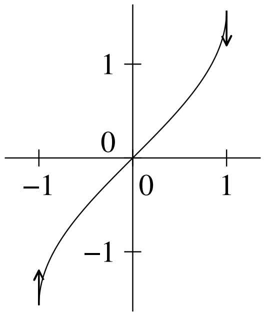
Cas particulier où $a = 1/3$:

- La fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$: c'est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^3$
- f est impaire et strictement croissante.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$



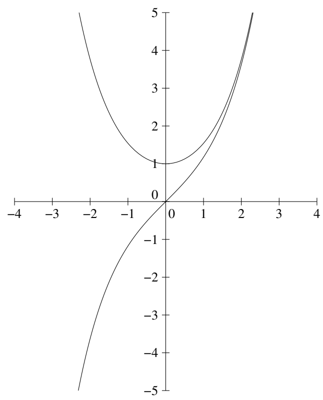
- La fonction arcsin est la bijection réciproque de la restriction du sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- arcsin est définie sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Pour $x \in [-1,1]$, $\arcsin(x)$ est l'angle θ appartenant à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour lequel $\sin(\theta) = x$.
- $\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \arcsin(\sin(\theta)) = \theta$

  $\forall x \in [-1,1] \quad \sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- arcsin est une fonction impaire strictement croissante.
- arcsin est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[\quad \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Les fonctions arcsin et arccos sont liées par la relation : $\forall x \in [-1,1] \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$
- Connaître la représentation graphique de arcsin.



- Les fonctions ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- ch est paire, sh est impaire.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$
- Pour tout réel x, $\text{ch}(x) \geq 1$ et $\text{sh}(x)$ est du signe de x
- Pour tout réel x, $\text{ch}(x) > \text{sh}(x)$
- Formules d'addition.
- ch et sh sont dérivables : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$ et $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$

  $\lim_{x \to +\infty} \text{ch}(x) - \text{sh}(x) = 0$



- sh est bijective