Exercice 1 : étude de fonctions (11 pts)

1. (a) On compare le numérateur et le dénominateur : $1+x-2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2\geq 0$.
On a donc : $0\leq 2\sqrt{x}\leq 1+x$

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x\in\mathbb{R}_+ \quad 0\leq f(x)\leq 1 \quad \textbf{(1 pt)}}$

(b) Soit $x\in]0,+\infty[$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{x+1}=\frac{2\sqrt{x}}{x+1}=f(x)$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x\in]0,+\infty[\quad f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x) \quad \textbf{(0.75 pt)}}$

(c) D'après les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x\in]0,+\infty[\quad f'(x)=\frac{\frac{1+x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{(1+x)^2}=\frac{(1+x)-2x}{\sqrt{x}(1+x)^2}=\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} \qquad \textbf{(1.25 pt)}$$

<u>Dérivabilité en 0 :</u> $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{2}{\sqrt{x}(x+1)}$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}(x+1)=0^+$, alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$.

f n'est donc pas dérivable en 0. (0.75 pt)

(d) **Barème : 1.25 pt**

$f'(x)$ est du signe de $1-x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f			1		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

$$f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)=+\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$

<u>Autre justification possible :</u> d'après la question b, $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} t=\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0 \\ f(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0\end{array}\right\}\text{ par composition des limites, } \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

2. (a) F est la composée de arcsin et f.
f est strictement croissante sur $[0,1]$ et arcsin est strictement croissante, donc F est strictement croissante sur $[0,1]$.
f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et arcsin est strictement croissante, donc F est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. **(0.75 pt)**

(b) La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $[0,1]$.
On exclut du domaine d'application des théorèmes opératoires les valeurs de x pour lesquels $f(x)=1$.
Or la fonction f prend la valeur 1 seulement au point 1.
On peut donc appliquer les théorèmes opératoires sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. **(0.75 pt)**

$$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}}\times f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x)^2-4x}{(1+x)^2}}}\times f'(x)=\frac{\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{x^2-2x+1}}\times\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

Or $\sqrt{(1+x)^2}=1+x$ car $1+x\geq 0$,
Et $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

Ainsi, $F'(x) = \dfrac{1-x}{|x-1|\sqrt{x}(1+x)}$

$$F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x \in]0,1[\\ \\ \dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases} \qquad \textbf{(1.75 pt)}$$

3. (a) On a : $\tan(\theta) = \sqrt{x}$

D'où : $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} = \dfrac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \dfrac{2\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1+\dfrac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \dfrac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = \sin(2\theta)$ **(1 pt)**

(b) **Barème : 1.75 pt**

On en déduit que $F(x) = \arcsin(\sin(2\theta))$.

Attention, *la relation* $\arcsin(\sin(t)) = t$ *n'est valable que pour* $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

On distingue deux cas :

• Si $x \leq 1$: alors $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, donc $\arctan(0) \leq \arctan(\sqrt{x}) \leq \arctan(1)$ par croissance de la fonction arctan.

Puis $0 \leq 2\theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

D'où $F(x) = 2\theta = 2\arctan(\sqrt{x})$

• Si $x > 1$: alors $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

donc $\dfrac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$, puis $0 < \pi - 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$

D'où $F(x) = \arcsin(\sin(\pi - 2\theta)) = \pi - 2\theta = \pi - 2\arctan(\sqrt{x})$

Autre justification possible :

Si $x > 1$, alors $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en utilisant le résultat de la question 1b.

Comme $\dfrac{1}{x} \in \left]0,1\right[$, alors $F\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x})\right)$

Exercice 2 : relations entre deux fonctions (4.5 pts)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{ch}(x) > 1$, donc $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} < 1$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $]-1,1[$, et la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (comme composée de deux fonctions dérivables).

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}} \times \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = -\frac{\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)}}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)-1}} \times \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

Or $\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)} = \mathrm{ch}(x)$ car $\mathrm{ch}(x) \geq 0$,

Et $\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)-1} = \sqrt{\mathrm{sh}^2(x)} = \mathrm{sh}(x)$ car $\mathrm{sh}(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{On obtient ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}}$ **1.5 pt**

Lorsque $x \in]-\infty,0[$, on a $\mathrm{sh}(x) < 0$, d'où $\sqrt{\mathrm{sh}^2(x)} = -\mathrm{sh}(x)$.

$\boxed{\text{Par conséquent, } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}}$ **0.5 pt**

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes opératoires, et $g'(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \times e^x = \dfrac{1}{e^{-x}+e^x} = \dfrac{1}{2\mathrm{ch}(x)}$.

La fonction $f + 2g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \in]0,+\infty[$, $(f+2g)'(x) = f'(x) + 2g'(x) = 0$.

$f+2g$ est donc une fonction constante sur $]0,+\infty[$.
De plus $f+2g$ est continue en 0, par conséquent, elle est constante sur $[0,+\infty[$.
Et $f(0)+2g(0)=\arcsin(1)+2\arctan(1)=\dfrac{\pi}{2}+2\times\dfrac{\pi}{4}=\pi$

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x\in\mathbb{R}_+ \quad \arcsin\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)+2\arctan(e^x)=\pi}$ **1.5 pt**

3. Pour $x\in]-\infty,0[$, on a $f'(x)=2g'(x)$.
   La fonction $f-2g$ est constante sur $]-\infty,0[$.
   De plus $f-2g$ est continue en 0, par conséquent, elle est constante sur $]-\infty,0]$.
   Et $f(0)-2g(0)=0$, d'où $\forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)-2g(x)=0$

   $\boxed{\text{Ainsi, } \forall x\in]-\infty,0[\quad \arcsin\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)=2\arctan(e^x)}$ **1 pt**

Exercice 3 : étude d'une fonction (11.5 pts)

1. **Barème : 2.25 pts.**
   Détail : monotonie de f (0.5 pt) - application du thm de la bijection (0.5 pt) - limites de g pour la détermination de J (0.75 pt) - dérivabilité de h (0.5 pt)

   La fonction g est impaire.

   D'après les théorèmes opératoires, g est dérivable et $\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)=\operatorname{ch}(x)-1$.
   Donc $g'(0)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad g'(x)>0$.

   La fonction g est donc **strictement croissante, et continue** sur $\mathbb{R}$, par conséquent elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right[$.
   Or $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}-x=e^x\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^{-2x}}{2}-\dfrac{x}{e^x}\right)$, et d'après les croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.
   On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^{-2x}}{2}-\dfrac{x}{e^x}\right)=\dfrac{1}{2}$, puis que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.
   Comme g est impaire, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } J=\mathbb{R}}$

   g dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction g' s'annule en 0
   D'après le théorème sur la dérivabilité d'une bijection réciproque, la fonction h n'est pas dérivable au point x tel que $g'(h(x))=0$, c'est-à-dire tel que $h(x)=0$.
   Or $h(0)=0$. **On en déduit que h n'est pas dérivable en 0.**

   $\boxed{\text{La fonction } h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$

2. (a) **Barème : 1 pt.**

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th}(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-a)=+\infty$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

   Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th}(x)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-a)=-\infty$, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$

   Comme $\lim\limits_{x\to0^+}(x-a)=-a$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{th}(x)=0^+$, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty}$

   Comme $\lim\limits_{x\to0^-}(x-a)=-a$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{th}(x)=0^-$, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty}$

   (b) **Barème : questions b et c (1.75 pt) - question d (1.25 pt).**

   On a : $x\big(1-\operatorname{th}(x)\big)=x\left(1-\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)=x\times\dfrac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}=0$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x\big(1-\operatorname{th}(x)\big)=0}$

   (c) $f(x)-x=\dfrac{x-a-x\operatorname{th}(x)}{\operatorname{th}(x)}=\dfrac{x(1-\operatorname{th}(x))-a}{\operatorname{th}(x)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(1-\mathrm{th}(x)\big)-a=-a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{th}(x)=1$, d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-a}$

On en déduit que la droite Δ_1 d'équation $y=x-a$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$

(d) De même, on a $f(x)+x=\dfrac{x(1+\mathrm{th}(x))-a}{\mathrm{th}(x)}$

On peut se servir du résultat de la question b en remarquant que $x\big(1+th(x)\big)=x\big(1-th(-x)\big)$.

$$\left.\begin{array}{r} t=-x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ t\big(1-\mathrm{th}(t)\big) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \text{ par composition de limites, on obtient } \lim_{x\to-\infty} -x\big(1-\mathrm{th}(-x)\big)=0$$

La fonction th étant impaire, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} x(1+\mathrm{th}(x))=0$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=a}$

On en déduit que la droite Δ_2 d'équation $y=-x+a$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$

3. (a) D'après les théorèmes opératoires, f est dérivable et

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \qquad f'(x)=\frac{\mathrm{th}(x)-\dfrac{x-a}{\mathrm{ch}^2(x)}}{\mathrm{th}^2(x)}=\frac{\mathrm{th}(x)\mathrm{ch}^2(x)-x+a}{\mathrm{th}^2(x)\mathrm{ch}^2(x)}=\frac{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)-x+a}{\mathrm{sh}^2(x)}$$

Or $2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)=\mathrm{sh}(2x)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x\in\mathbb{R}^* \quad f'(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(2x)-2x+2a}{2\mathrm{sh}^2(x)} \quad \textbf{(1 pt)}}$

(b) On a : $f'(x)=0 \iff \mathrm{sh}(2x)-2x=-2a$

$\iff g(2x)=-2a$

Or, la fonction g est bijective, par conséquent, l'équation $g(2x)=-2a$ possède une unique solution : le nombre réel $b=\dfrac{h(-2a)}{2}$. Il reste à justifier que $b\in\mathbb{R}^*$.

La fonction h étant strictement croissante, on a : $h(-2a)<h(0)$, ce qui entraîne que $b<0$.

$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } f'(x)=0 \text{ admet une unique solution } b=\dfrac{h(-2a)}{2} \quad \textbf{(0.75 pt)}}$

On a : $f(b)=\dfrac{b-a}{\mathrm{th}(b)}$

Or $f'(b)=0$, donc $\mathrm{sh}(2b)-2b+2a=0$, d'où $b-a=\dfrac{\mathrm{sh}(2b)}{2}=\mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(b)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } f(b)=\dfrac{\mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(b)}{\mathrm{th}(b)}=\mathrm{ch}^2(b) \quad \textbf{(1 pt)}}$

(c) **Barème : question 3c (1 pt) - question 4 (1.5 pt).**

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\mathrm{sh}(2x)-2x+2a=g(2x)+2a$.

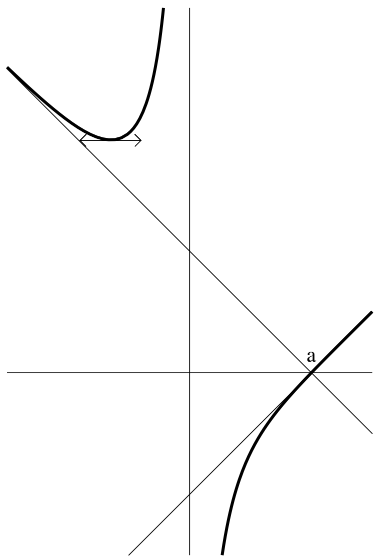
Or la fonction $x\mapsto g(2x)+2a$ est une fonction strictement croissante (d'après la question 1).

Par conséquent, si $x>b$, alors $f'(x)>0$. Et si $x<b$, alors $f'(x)<0$.

x	$-\infty$		b			0			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		||		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\mathrm{ch}^2(b)$	$\nearrow$	$+\infty$	||	-∞	$\nearrow$	$+\infty$

4. On note que f s'annule en a et $f'(a)=\dfrac{\mathrm{sh}(2a)}{2\mathrm{sh}^2(a)}=\dfrac{\mathrm{ch}(a)}{\mathrm{sh}(a)}>1$.

Les deux asymptotes se coupent au point d'abscisse $(a, 0)$.



Exercice 4 : inégalité de Hölder (6.5 pts)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque les fonctions puissances sont dérivables), et :
   $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(t) = -\dfrac{a^p}{pq} t^{-\frac{1}{q}-1} + \dfrac{b^q}{pq} t^{\frac{1}{p}-1}$
   Or $\dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{-1}{q}$,
   D'où $f'(t) = -\dfrac{a^p}{pq} t^{-\frac{1}{q}-1} + \dfrac{b^q}{pq} t^{-\frac{1}{p}} \;=\; \dfrac{1}{pq}\, t^{-\frac{1}{q}-1} \Big[-a^p + b^q t \Big]$ **1.25 point**
   Comme $\dfrac{1}{pq}\, t^{-\frac{1}{q}-1}$ est strictement positif, $f'(t)$ est du signe de $-a^p + b^q t$.
   Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(t) = 0 \Longleftrightarrow b^q t = a^p$
   $\Longleftrightarrow t = \dfrac{a^p}{b^q}$
   Et : $f'(t) > 0 \Longleftrightarrow t > \dfrac{a^p}{b^q}$
   La fonction f est par conséquent décroissante sur $\Big]0, \dfrac{a^p}{b^q}\Big]$ et croissance sur $\Big[\dfrac{a^p}{b^q}, +\infty\Big[$: elle admet donc un minimum m au point $\dfrac{a^p}{b^q}$. **1 point**
   $m \;=\; f\Big(\dfrac{a^p}{b^q}\Big) \;=\; \dfrac{a^p}{q} \dfrac{a^{-p/q}}{b^{-1}} + \dfrac{b^q}{q} \dfrac{a}{b^{q/p}} \;=\; \dfrac{1}{p} a^{p(1-\frac{1}{q})} b + \dfrac{1}{q} b^{q(1-\frac{1}{p})} a$
   On rappelle que $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$, d'où $a^{p(1-\frac{1}{q})} = a^1 = a$.
   De même, $b^{q(1-\frac{1}{p})} = b$.
   On obtient alors : $m = ab\Big(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\Big) = ab$

   $\boxed{\text{Le minimum de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ vaut } ab}$ **1.25 point**

2. La question précédente permet d'affirmer que :
   $$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} t^{-\frac{1}{q}} + \frac{b^q}{q} t^{\frac{1}{p}}$$
   De plus, on remarque que l'inégalité reste vraie si a ou b est nul.
   On applique cette inégalité pour $a = |x_k|$ et $b = |y_k|$ (où $k \in [\![1\,,\,n]\!]$) pour obtenir après sommation terme à terme :
   $$\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{|x_k|^p}{p} t^{-\frac{1}{q}} + \frac{|y_k|^q}{q} t^{\frac{1}{p}} \Big)$$

On a également d'après l'inégalité triangulaire :

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k|$$

Ce qui permet de déduire l'inégalité attendue :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Big|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big| \leq \frac{t^{-\frac{1}{q}}}{p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{t^{\frac{1}{p}}}{q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q} \quad \textbf{1.5 point}$$

3. Dans l'expression de droite de l'inégalité précédente, on reconnaît $f(t)$ avec $a = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ et $b = \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$.

   Le terme $\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big|$ est inférieur à $f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, donc il est inférieur au minimum $m = f\Big(\frac{a^p}{b^q}\Big)$:

$$\boxed{\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}} \quad \textbf{1.5 point}$$
