
Exercice 1 : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$
   (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f(x) \leq 1$.
   (b) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[\quad f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.
   (c) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $f'(x)$.
   (d) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$ (on précisera la limite de f en $+\infty$) .
2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) = \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$
   (a) Déterminer, sans utiliser la dérivée, les variations de F.
   (b) Dérivabilité de F : sur quel domaine peut-on appliquer les théorèmes opératoires ?
   Déterminer une expression simple de $F'(x)$.
3. **Expression simplifiée de F :**
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $\theta = \arctan(\sqrt{x})$.
   (a) Montrer que : $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} = \sin(2\theta)$.
   (b) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$ (on distinguera deux cas suivant que $x \leq 1$ ou $x > 1$).

Exercice 2 : relations entre deux fonctions

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan(e^x)$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$
   Que vaut $f'(x)$ lorsque $x \in]-\infty, 0[$?
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \arcsin\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) + 2\arctan(e^x) = \pi$.
3. Déterminer une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-\infty, 0[$.

Exercice 3 : étude d'une fonction

Soit a un réel strictement positif. On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f par : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{x-a}{\operatorname{th}(x)}$

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \operatorname{sh}(x) - x$.
   Démontrer que la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer.
   On désigne par h la bijection réciproque de g. La fonction h est-elle dérivable sur J ?
2. (a) Préciser les limites de f aux bords de son domaine de définition.
   (b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\big(1 - \operatorname{th}(x)\big) = 0$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$.
   En déduire qu'il existe une droite asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
   On rappelle que la droite D d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - mx - p = 0$
   (d) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x)$.
   En déduire qu'il existe une droite asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.
3. (a) Justifier que f est dérivable et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(2x) - 2x + 2a}{2\operatorname{sh}^2(x)}$

(b) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution b qu'on exprimera à l'aide de la fonction h. Prouver que $f(b) = \mathrm{ch}^2(b)$.

(c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 4 : inégalité de Hölder

Soient $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

On considère deux nombres réels p et q strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.

   On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f(t) = \dfrac{a^p}{p} t^{-\frac{1}{q}} + \dfrac{b^q}{q} t^{\frac{1}{p}}$

   Démontrer que le minimum de la fonction f vaut ab.

2. Démontrer que pour tout $t > 0$:

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Big| \leq \frac{t^{-\frac{1}{q}}}{p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{t^{\frac{1}{p}}}{q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q$$

3. En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Big| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \Big)^{\frac{1}{q}}$$
