Exercice 1 : étude de suites d'intégrales (10 pts)

1. Question 1a, 1b et 1c : **1,75 point**

(a) $\boxed{x \mapsto -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \text{ est une primitive de } \varphi \text{ sur } [0,1]}$

(b) $\boxed{u_0 = \Big[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}}$

(c) On intègre u_1 par parties avec :

$$u'(x) = \sqrt{1-x},\ u(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$$
$$v(x) = 1,\ v'(x) = 1$$
$$u_1 = \Big[-\frac{2}{3}x(1-x)^{3/2}\Big]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{3/2}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\Big[-\frac{2}{5}(1-x)^{5/2}\Big]_0^1$$

$\boxed{\text{On obtient : } u_1 = \frac{4}{15}}$

2. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On intègre u_n par parties avec :

$$u'(x) = \sqrt{1-x},\ u(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$$
$$v(x) = x^n,\ v'(x) = nx^{n-1}$$
$$u_n = \Big[-\frac{2}{3}x^n(1-x)^{3/2}\Big]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\mathrm{d}x$$

Or $(1-x)^{3/2} = (1-x)\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x} - x\sqrt{1-x}$.

D'où $u_n = \frac{2n}{3}\Big(\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x\Big)$

$\boxed{\text{On a ainsi montré : } u_n = \frac{2n}{3}(u_{n-1} - u_n)}$ **(1.5 pt)**

(b) D'après la relation précédente, on a : $u_{n+1} = \frac{2n+2}{3}(u_n - u_{n+1})$, ce qui donne : $\Big(1 + \frac{2n+2}{3}\Big)u_{n+1} = \frac{2n+2}{3}u_n$

$\boxed{\text{On a donc : } u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n}$ **(0.5 pt)**

(c) $u_2 = \frac{4}{7}u_1$, d'où $\boxed{u_2 = \frac{16}{105}}$ **(0.5 pt)**

3. (a) $a_{n+1} = \frac{(2n+5)!\,u_{n+1}}{(n+1)!\,(n+2)!} = \frac{(2n+5)\,(2n+4)\,(2n+3)!\,(2n+2)\,u_n}{(n+1)\,n!\,(n+2)\,(n+1)!\,(2n+5)} = 4 \times \frac{(2n+3)!\,u_n}{n!\,(n+1)!}$

Ainsi, $a_{n+1} = 4a_n$: $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geq 0} \text{ est une suite géométrique de raison 4}}$ **(1 pt)**

(b) $a_0 = 6u_0 = 4$, d'où $a_n = 4^n a_0 = 4^{n+1}$, puis $\boxed{u_n = \frac{n!\,(n+1)!\,4^{n+1}}{(2n+3)!}}$ **(0.5 pt)**

4. On a : $x = 1 - t^2$, donc $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2t$, $\mathrm{d}x = -2t\mathrm{d}t$.

$u_n = -2\int_1^0 (1-t^2)^n\sqrt{t^2} \times t\mathrm{d}t$ Comme t est positif, $\sqrt{t^2} = t$

Ainsi, $u_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n t^2\mathrm{d}t$

On utilise la formule du binôme puis la linéarité de l'intégrale :

$$u_n = 2\int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k t^{2k+2}\mathrm{d}t = 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \int_0^1 t^{2k+2}\mathrm{d}t$$

Et $\int_0^1 t^{2k+2}\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^{2k+3}}{2k+3}\Big]_0^1 = \frac{1}{2k+3}$.

$\boxed{\text{On obtient ainsi : } u_n = 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+3}}$ **(1.75 pt)**

$$u_2 = 2\Big(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\Big) = 2 \times \frac{35-42+15}{105} = \frac{16}{105} \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

5. (a) On pose $x = \sin^2(t)$, d'où $\dfrac{dx}{dt} = 2\sin(t)\cos(t)$, d'où $dx = 2\sin(t)\cos(t)dt$

x	t
0	0
1	$\pi/2$

Ce qui donne : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\sqrt{1-\sin^2(t)} \times 2\sin(t)\cos(t)dt$

Et $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ car $\cos(t) \geq 0$ sur $\Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$.

D'où $u_n = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\cos^2(t)dt$

En utilisant la relation $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$, on déduit : $\boxed{u_n = 2W_{2n+1} - 2W_{2n+3}}$ **(1.5 pt)**

(b) D'après la relation rappelée par l'énoncé, on a : $W_{2n+3} = \dfrac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1}$.

$\boxed{\text{D'où } u_n = 2\Big(1 - \dfrac{2n+2}{2n+3}\Big)W_{2n+1} = \dfrac{2}{2n+3}W_{2n+1}}$ **(0.5 pt)**

Exercice 2

1. (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

   Une primitive de $t \mapsto -\dfrac{v}{vt+L}$ est $t \mapsto -\ln(vt+L)$.

   Les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) sont les fonctions $t \mapsto Ce^{\ln(vt+L)}$, c'est-à-dire les fonctions $t \mapsto C(vt+L)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

   On cherche ensuite une solution particulière g de (E) sous la forme $g(t) = C(t)(vt+L)$ avec $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

   g est solution de l'équation (E) si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad C'(t)(vt+L) = w$.

   $C(t) = \dfrac{w}{v}\ln(vt+L)$ convient.

   Les solutions de (E) sont donc les fonctions $t \mapsto \frac{w}{v}(vt+L)\ln(vt+L) + C(vt+L)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

   Ainsi, x solution de (E) est de la forme

   $$x(t) = \frac{w}{v}(vt+L)\ln(vt+L) + C(vt+L) = (vt+L)\left(\frac{w}{v}\ln(vt+L) + C\right)$$

   x satisfait la condition initiale $x(0) = 0$, ce qui donne :

   $$C = -\frac{w}{v}\ln(L)$$

   Ainsi, on obtient l'expression de $x(t)$:

   $$\boxed{x(t) = \frac{w}{v}(vt+L)\ln\left(\frac{vt+L}{L}\right)}$$

2. La fourmi atteint l'extrémité M à l'instant t si et seulement si $x(t) = vt+L$.

   Or, pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a les équivalences suivantes :

   $$x(t) = vt+L \iff \ln\left(\frac{vt+L}{L}\right) = \frac{v}{w} \iff \frac{vt+L}{L} = e^{v/w} \iff t = \frac{L}{v}(e^{v/w}-1)$$

   L'équation $x(t) = vt+L$ admet donc une unique solution : $T = \frac{L}{v}(e^{v/w}-1)$.

   Cette solution est bien positive.

   $$\boxed{\text{Ainsi, la fourmi finit par atteindre l'extrémité mobile } M \text{ de l'élastique à l'instant } T = \frac{L}{v}(e^{v/w}-1)}$$

3. **Applications numériques :**

   (a) On obtient $T \simeq 319$ s. La fourmi atteint l'extrémité M après 5 minutes 19 secondes.

   (b) On obtient $T \simeq 2.4 \times 10^9$ s. La fourmi mettra environ 77 années pour atteindre l'extrémité M.

   Remarques et commentaires :

   Il est démontré à la question 2 que la fourmi finit toujours par rejoindre l'extrémité de l'élastique (*ce qui est rassurant pour la fourmi*), et on connaît même l'expression du temps T mis par la fourmi pour atteindre son but.

   On s'aperçoit cependant que ce temps T peut être infiniment long et qu'en pratique, elle ne parviendra peut être pas à atteindre le bout de l'élastique : si par exemple la valeur de T est très supérieure à l'espérance de vie de la fourmi, la fourmi risque fortement de mourir avant de parvenir à ses fins ... (*bien que le résultat de la question 2 soit rassurant, la fourmi a raison de s'inquiéter*).

   On peut aussi remettre en cause certaines hypothèses du modèle, comme par exemple la possibilité que l'élastique s'étire indéfiniment, le fait que la fourmi marche à vitesse constante (elle ne fait donc jamais de pause ...).

   Un scientifique ou un ingénieur commence très souvent par résoudre un problème donné dans un cadre simple (hypothèses simplificatrices). Ensuite, il étudie l'influence de certains paramètres sur les résultats trouvés, discute de la pertinence du modèle choisi, et améliore ensuite le modèle pour qu'il tienne compte davantage de la réalité.
