Programme de colle pour la semaine du 2 décembre

mathématiques MPSI : semaine 10

1. **Limite d'une suite réelle :** révision du programme précédent.
2. **Limite d'une suite complexe :**

   Brève extension des résultats sur les suites réelles.

   Une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

   Convergence de $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de q.

   Théorème de Bolzano-Weierstrass.

3. **Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (partie 1)**

   (a) Relation de divisibilité. Propriétés élémentaires. Couples d'entiers associés. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

   Congruences dans $\mathbb{Z}$: règles opératoires.

   (b) Définition du PGCD de deux entiers relatifs.
   Lemme : $a \wedge b = b \wedge r$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b.
   Algorithme d'Euclide.
   Relation de Bézout, calcul pratique de coefficients de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
   Quelques propriétés du PGCD : d est un diviseur commun de a et $b \Longleftrightarrow d$ divise $a \wedge b$
   pour $k \in \mathbb{N}$, $(ka) \wedge (kb) = k \times (a \wedge b)$

   Couples d'entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout, corollaires. Théorème de Gauss.
   Prop : soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, soit $d \in \mathbb{N}$.
   $d = a \wedge b \Longleftrightarrow$ il existe $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = da'$, $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$

   Forme irréductible d'un nombre rationnel.

   Quelques propriétés du PPCM : m est un multiple commun de a et $b \Longleftrightarrow m$ est un multiple de $a \vee b$
   Lien entre PGCD et PPCM : $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

QUESTIONS DE COURS OU EXERCICE TYPE

La colle pourra débuter par une ou plusieurs démonstrations de cours, ou un exercice type.

— Corollaire 1 du théorème de Bézout :
Si un entier est divisible par deux entiers premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit

— Corollaire 2 du théorème de Bézout :
Si un entier est premier avec deux autres, alors il est premier avec leur produit

— Énoncé et démonstration du théorème de Gauss.

— Démonstration de la proposition : si m est un multiple commun de a et b, alors m est un multiple de $a \vee b$

— Exercice type : résolution dans $\mathbb{Z}^2$ d'une équation de la forme $ax + by = c$ (comme par exemple $19x + 31y = 5$)