Exercice 1 : équation fonctionnelle

Partie A : méthode 1

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ (où a et b sont deux nombres réels).
   f est continue et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{ax+b+ay+b}{2} = a\frac{x+y}{2} + b = f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$\boxed{\text{Les fonctions affines sont des éléments de } \mathcal{E}}$

2. (a) En appliquant la relation fonctionnelle aux réels x et $-x$, on obtient $f(0) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.
   Comme $f(0) = 0$, on déduit : $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

   (b) En appliquant la relation fonctionnelle aux réels $2x$ et 0, on obtient $f(x) = \dfrac{f(2x)+f(0)}{2}$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } \; 2f(x) = f(2x)}$

   (c) Soit P_n : « $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = 0$ »
   $f(1) = 0$ (par hypothèse), P_0 est vraie.
   Supposons P_n vraie pour un entier $n \geq 0$.
   D'après la question 2b appliquée à $x = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, $2f\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right) = f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$, d'où $f\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right) = 0$

   $\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence simple, } \forall n \in \mathbb{N} \quad f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0}$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Soit P_p : « $f\left(\dfrac{p}{2^n}\right) = 0$ »
   $f(0) = 0$: P_0 est vraie.
   Supposons P_p vraie pour un entier $p \geq 0$.
   En appliquant la relation fonctionnelle aux réels $x = \dfrac{p}{2^{n-1}}$ et $y = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, on obtient :

$$f\left(\frac{p+1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{p}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

   D'après la question 2b, $\dfrac{1}{2}f(t) = f\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
   On trouve ainsi : $f\left(\dfrac{p+1}{2^n}\right) = f\left(\dfrac{p}{2^n}\right) + f\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = 0$ en utilisant P_p et le résultat de la question 2c.

   $\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence simple, } \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0}$

   (e) On rappelle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $t - 1 \leq \lfloor t \rfloor \leq t$.
   On a : $2^n x - 1\lfloor 2^n x\rfloor \leq 2^n x$, d'où $x - \dfrac{1}{2^n} \leq u_n \leq x$.
   u_n étant encadré par deux termes de limite x, d'après le théorème de convergence par encadrement, $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers x

   (f) D'après la question 2d, $f(u_n) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   D'autre part, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et f est continue, donc $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$
   L'unicité de la limite permet de déduire que $f(x) = 0$ (résultat valable pour $x \in \mathbb{R}_+$).
   f étant impaire, la relation s'étend aux réels négatifs.

   $\boxed{f \text{ est donc la fonction nulle}}$

3. (a) g est continue et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
   $\dfrac{g(x)+g(y)}{2} = \dfrac{f(x)+f(y)}{2} - \dfrac{ax+b+ay+b}{2} = f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - \left(a\,\dfrac{x+y}{2} + b\right) = g\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$
   g est un élément de $\mathcal{E}$

(b) Il suffit de remarquer que $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$.
D'après la question 2, g est donc la fonction nulle.

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b}$

Partie B : méthode 2

1. $\displaystyle\int_0^1 f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\mathrm{d}y = \Big[2F\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big]_0^1 = 2F\Big(\frac{x+1}{2}\Big) - 2F\Big(\frac{x}{2}\Big)$

   D'autre part, $\displaystyle\int_0^1 f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{f(x)+f(y)}{2}\mathrm{d}y$ *relation fonctionnelle*

   $\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y$ *par linéarité*

   $\displaystyle = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\Big[F(y)\Big]_0^1$

   On rappelle l'intégrale d'une fonction constante : $\displaystyle\int_a^b m\mathrm{d}t = m(b-a)$

   $\displaystyle = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}F(1)$

   $\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 4F\Big(\frac{x+1}{2}\Big) - 4F\Big(\frac{x}{2}\Big) - F(1)}$

   Comme F est dérivable, les théorèmes opératoires permettent de déduire que f est dérivable.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   En dérivant la relation $\forall y \in \mathbb{R} \quad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ par rapport à y, on obtient :
   $\forall y \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2}f'\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f'(y)}{2}$
   En particulier, $\frac{1}{2}f'\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{f'(0)}{2}$
   En appliquant cette dernière relation au réel $2x$, on a ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f'(0)$

3. En posant $a = f'(0)$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a$, puis $f(x) = ax + b$ avec $b = f(0)$.

Exercice 2 : équation fonctionnelle

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $g(x) \times g(x) = 1$, on déduit que $g(x) = 1$ ou $g(x) = -1$.
   On a donc obtenu que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(g(x) = 1 \text{ ou } g(x) = -1\Big)$
   On cherche à montrer que : $\Big(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 1\Big)$ ou $\Big(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -1\Big)$
   Les deux propositions ne sont pas équivalentes. Par exemple, la fonction g définie par $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ vérifie la première proposition mais pas la deuxième.

   La fonction g est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par conséquent, elle est de signe constant.
   Ainsi, $\Big(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 1\Big)$ ou $\Big(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -1\Big)$

   $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est constante}}$ **(1.5 pt)**

   Autre justification possible :
   Supposons par l'absurde que la fonction g ne soit pas constante.
   Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = -1$ et il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $g(b) = 1$.
   La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$ et comme elle change de signe, on déduit avec le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$.
   Ce qui est contradictoire avec $g(x) \times g(x) = 1$.

   $\boxed{\text{Ainsi, la fonction } g \text{ est constante}}$

   Autre justification possible :
   g est continue, donc $g(\mathbb{R})$ est un intervalle (l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle).
   $g(\mathbb{R})$ est un intervalle inclus dans $\{-1, 1\}$, par conséquent $g(\mathbb{R}) = \{1\}$ ou $g(\mathbb{R}) = \{-1\}$

   $\boxed{\text{Ainsi, } \Big(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 1\Big) \text{ ou } \Big(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -1\Big)}$

2. (a) D'après l'équation fonctionnelle, on a : $\Big(1+f^2(0)\Big)f(0)=2f(0)$.

Ce qui donne : $f^3(0)-f(0)=0$, c'est-à-dire $f(0)\Big(f(0)-1\Big)\Big(f(0)+1\Big)=0$

D'où $f(0)=0$ ou $f(0)=1$ ou $f(0)=-1$.

$\boxed{\text{Ainsi, } f(0)\in\Big\{-1,0,1\Big\}}$ **(1.25 pt)**

(b) Supposons que $f(0)=1$.

Soit $x\in\mathbb{R}$.

On a d'après l'équation fonctionnelle : $\Big(1+f(x)f(0)\Big)\times f(x)=f(x)+f(0)$, ce qui donne $f^2(x)=1$.

f étant de plus continue, on déduit avec le résultat préliminaire que f est constante.

$\boxed{\text{On a montré que si } f(0)=1, \text{ alors } f \text{ est constante}}$ **(1 pt)**

(c) Soit $P(n)$: « $f\left(\frac{a}{2^n}\right)=1$ »

$P(0)$ est vraie par hypothèse.

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n\geq 0$.

D'après l'équation fonctionnelle appliquée aux réels $\frac{a}{2^{n+1}}$ et $\frac{a}{2^{n+1}}$, on a :

$$\left(1+f^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\right)\times f\left(\frac{a}{2^n}\right)=2f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$$

Comme par hypothèse de récurrence, $f\left(\frac{a}{2^n}\right)=1$, on obtient : $1+f^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)=2f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$

Ce qui donne : $1+f^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)-2f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)=0$

c'est-à-dire : $\left(f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)-1\right)^2$ *on reconnaît l'identité remarquable* $x^2-2x+1=(x-1)^2$

D'où $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)=1$. $P(n+1)$ est vraie.

$\boxed{\text{On a ainsi montré par récurrence que } \forall n\in\mathbb{N}\quad f\left(\frac{a}{2^n}\right)=1}$ **(2 pts)**

$\frac{a}{2^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et f est continue, donc $f\left(\frac{a}{2^n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(0)$

D'autre part, $f\left(\frac{a}{2^n}\right)=1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$

Par unicité de la limite, on déduit que $f(0)=1$.

D'après la question b, $\boxed{f \text{ est constante}}$ **(1 pt)**

(d) S'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=-1$, la fonction $-f$ vérifie l'équation fonctionnelle, est continue et $-f(a)=1$, donc d'après la question précédente, $-f$ est constante et ainsi f **est constante.** **(1.25 pt)**

3. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : $\Big(1+f(x)f(-x)\Big)\times f(0)=f(x)+f(-x)$.

Comme $f(0)=0$, on obtient $f(x)+f(-x)=0$, d'où $f(-x)=-f(x)$: $\boxed{f \text{ est impaire}}$ **(1 pt)**

(b) Supposons que par l'absurde que $f(x)\geq 1$.

$f(0)=0$ et f est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=1$.

D'après la question 2c, f est constante. **Contradiction.**

Par conséquent, $f(x)<1$.

On montre de même que $f(x)>-11$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)\in]-1,1[}$ **(1.5 pt)**

(c) Soit $x\in\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{P}_n$: $\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)}=\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$

$\mathcal{P}_0$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier $n\geq 0$.

Comme $f((n+1)x)=\frac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)}$ (équation fonctionnelle), on a :

$$\frac{1+f((n+1)x)}{1-f((n+1)x)} = \frac{1+\frac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)}}{1-\frac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)}} = \frac{1+f(nx)f(x)+f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)-f(nx)-f(x)}$$

$$= \frac{\Big(1+f(nx)\Big)\Big(1+f(x)\Big)}{\Big(1-f(nx)\Big)\Big(1-f(x)\Big)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n \times \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right) \text{ d'après } P(n)$$

Ainsi, $\dfrac{1+f((n+1)x)}{1-f((n+1)x)} = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{n+1}$: $P(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n} \quad \textbf{(2 pts)}$$

(d) Notons que $b > 0$ (car $f(1) \in]-1,1[$).

Avec $x = 1$, la relation précédente donne $\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)} = b^n$ puis $(b^n+1)f(n) = b^n - 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = \frac{b^n-1}{b^n+1}} \quad \textbf{(1 pt)}$$

(e) Soit $r \in \mathbb{Q}^+$. On pose $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

On applique l'égalité de la question c à $n = q$ et $x = \dfrac{p}{q}$:

$$\frac{1+f(q\frac{p}{q})}{1-f(q\frac{p}{q})} = \left(\frac{1+f(\frac{p}{q})}{1-f(\frac{p}{q})}\right)^q \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1+f(p)}{1-f(p)} = \left(\frac{1+f(\frac{p}{q})}{1-f(\frac{p}{q})}\right)^q$$

D'où $\dfrac{1+f(\frac{p}{q})}{1-f(\frac{p}{q})} = \left(\dfrac{1+f(p)}{1-f(p)}\right)^{1/q} = (b^p)^{1/q} = b^{p/q} = b^r$

On obtient alors : $1 + f(r) = b^r(1-f(r))$, puis $(b^r+1)f(r) = b^r - 1$

$$\boxed{\text{On en déduit } \forall r \in \mathbb{Q}^+ \quad f(r) = \tfrac{b^r-1}{b^r+1}} \quad \textbf{(2 pts)}$$

(f) Soit $r \in \mathbb{Q}^+$. On a : $b^r = e^{r\ln(b)}$.

En posant $k = \dfrac{\ln(b)}{2}$, on a : $b^r = e^{2kr}$, d'où $f(r) = \dfrac{b^r-1}{b^r+1} = \dfrac{e^{2kr}-1}{e^{2kr}+1} = \text{th}(kr)$.

Les fonctions f et th étant impaires, cette dernière relation s'étend à $\mathbb{Q}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour } k = \frac{\ln(b)}{2}, \text{ on a } \forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = \text{th}(kr)} \quad \textbf{(1.5 pt)}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: il existe une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ de rationnels qui converge vers x.

$$\left.\begin{array}{l} r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \\ \\ f(t) \underset{t\to x}{\longrightarrow} f(x) \\ \text{(car } f \text{ est continue)} \end{array}\right\} \text{ donc } f(r_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

D'autre part, $f(r_n) = \text{th}(kr_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \text{th}(kx)$ par continuité de la fonction th.

Par unicité de la limite, $\boxed{\text{on déduit : } f(x) = \text{th}(kx)}$ **(1.5 pt)**

4. Réciproquement, on vérifie aisément que pour $k \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \text{th}(kx)$ est continue et satisfait l'équation fonctionnelle, donc appartient à E.

En effet, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\text{th}(kx+ky) = \dfrac{\text{sh}(kx+ky)}{\text{ch}(kx+ky)} = \dfrac{\text{sh}(kx)\text{ch}(ky)+\text{ch}(kx)\text{sh}(ky)}{\text{ch}(kx)\text{ch}(ky)+\text{sh}(kx)\text{sh}(ky)}$

En divisant par $\text{ch}(kx)\text{ch}(ky)$, on obtient : $\text{th}(kx+ky) = \dfrac{\text{th}(kx)+\text{th}(ky)}{1+\text{th}(kx)\text{th}(ky)}$

$\boxed{\text{Les éléments de } E \text{ sont donc les fonctions } x \mapsto \text{th}(kx) \text{ (avec } k \in \mathbb{R}) \text{ et les fonctions constantes } x \mapsto 1 \text{ et } x \mapsto -1 \quad \textbf{(2 pts)}}$

EXERCICE 3 : ALGÈBRE

1. $I \in \mathcal{H}$
   Soient $M = aI + bJ$ et $M' = a'I + b'J$ deux éléments de $\mathcal{H}$ (où a, b, a' et b' sont des réels).
   Alors $M - M' = (a - a')I + (b - b')J$, donc $M - M' \in \mathcal{H}$.

   Et $MM' = (aI + bJ)(a'I + b'J) = aa'I + (ab' + ba')J + bb'J^2$
   On vérifie que $J^2 = 0$, d'où $MM' = aa'I + (ab' + ba')J$, par conséquent, $MM' \in \mathcal{H}$.

   De plus, $M'M = a'aI + (a'b + b'a)J = MM'$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \big(\mathcal{H}, +, \times\big) \text{ est un sous-anneau commutatif de } \big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times\big)}$ **(2 pts)**

2. Comme les matrices I et J commutent, on a d'après la formule du binôme :
   $M^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k I^{n-k} J^k$
   Or pour $k \geq 2$, $J^k = 0$.
   $\boxed{\text{Par conséquent, } M^n = a^n I + na^{n-1}bJ = \begin{pmatrix} a^n + na^{n-1}b & na^{n-1}b \\ -na^{n-1}b & a^n - na^{n-1}b \end{pmatrix}}$ **(2 pts)**

3. **Analyse :** supposons $M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ inversible.
   Alors il existe $N = \begin{pmatrix} a'+b' & b' \\ -b' & a'-b' \end{pmatrix}$ tel que $MN = I$.
   D'après la question 1, $MN = \begin{pmatrix} aa' + ab' + ba' & ab' + ba' \\ -(ab' + ba') & aa' - (ab' + ba') \end{pmatrix}$.
   On en déduit dans un premier temps que : $ab' + ba' = 0$ (*en identifiant le coefficient de position* $(1, 2)$ *des matrices* MN *et* I)
   D'où $MN = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & aa' \end{pmatrix}$.
   Par conséquent, $aa' = 1$.
   Nécessairement, $a \neq 0$.
   On a ainsi montré que si $M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ est inversible, alors $a \neq 0$.

   Synthèse : supposons $M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$.
   On pose $N = \dfrac{1}{a}I - \dfrac{b}{a^2}J$.
   On a : $MN = \Big(aI + bJ\Big)\Big(\dfrac{1}{a}I - \dfrac{b}{a^2}J\Big) = I + \Big(-\dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{a}\Big)J = I$
   Ce qui prouve que M est bien inversible.

   $\boxed{\textbf{Conclusion :} \text{ les éléments inversibles de } \mathcal{H} \text{ sont les matrices } M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \text{ avec } a \neq 0}$ **(2.75 pts)**

4. Si $M = aI + bJ$ est un diviseur de zéro, alors il existe une matrice N non nulle de $\mathcal{H}$ telle que $MN = 0$.
   M n'est pas inversible (car sinon, en multipliant par M^{-1} à gauche la relation $MN = 0$, on obtiendrait $N = 0$)
   On en déduit que $a = 0$ (car d'après la question précédente, on a l'implication : M inversible $\Longrightarrow a \neq 0$)
   D'où $M = bJ$ avec $b \neq 0$.

   Réciproquement, si $M = bJ$ avec $b \neq 0$, alors $M^2 = b^2J^2 = 0$
   Donc M est un diviseur de zéro.

   $\boxed{\textbf{Conclusion :} \text{ les diviseurs de zéro de l'anneau } \mathcal{H} \text{ sont les matrices } M = \begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix} \text{ avec } b \neq 0}$ **(1.75 pt)**