Programme de colle pour la semaine du 27 janvier

mathématiques MPSI : semaine 16

1. **Généralités sur les polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$**
   (a) Définition. Degré d'un polynôme, coefficient dominant, polynôme unitaire.
   Degré d'une somme, d'un produit. $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau intègre.
   Evaluation d'un polynôme en un point.
   (b) Dérivation. Polynôme dérivé. Dérivées successives d'un polynôme.
   Opérations sur les polynômes dérivés. Formule de Leibniz.
   Formule de Taylor polynomiale.
   (c) Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$: multiples et diviseurs d'un polynôme, polynômes associés.
   Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
   (d) Composition.
2. **Racines d'un polynôme**

   Racine d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.

   Si α_1, α_2, ..., α_n sont des racines distinctes de P, alors $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ divise P.

   Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

   Si α_1, α_2, ..., α_n sont des racines distinctes de P et $\deg(P)=n$, alors les polynômes P et $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ sont associés.

   Multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.
   Si α_1, α_2, ..., α_r sont des racines distinctes de P d'ordre de multiplicité respectivement m_1, m_2, ... m_r, alors $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{m_i}$ divise P.

   Relations entre racines et coefficients d'un polynôme scindé.
3. **Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$:**
   PGCD de deux polynômes, algorithme d'Euclide. Relation de Bézout.
   Polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Corollaires. Théorème de Gauss.
   PPCM de deux polynômes.
   PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble.
4. Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}$.
   Le nombre de racines (dans $\mathbb{C}$) comptées avec leur ordre de multiplicité d'un polynôme non nul est égal à son degré.

   Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont la même multiplicité.

   Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Factorisation de X^n-1 dans $\mathbb{C}[X]$.
   Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

   Deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.