Exercice 1 : étude d'une suite de polynômes (12 pts)

1. (a) $P_1 = 2XP_0 - (1+X^2)P_0' = 2X$ et $P_2 = 2XP_1 - \dfrac{1}{2}(1+X^2)P_1' = 3X^2 - 1$.

   $\boxed{P_1 = 2X \text{ et } P_2 = 3X^2 - 1}$ **(0.5 pt)**

   (b) Soit $\mathcal{P}_n$: $\deg(P_n) \leq n$.

   $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.

   Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier $n \geq 2$.
   On sait que $\deg(P_n) \leq n$, et donc $\deg(P_n') \leq n-1$.
   On a alors $\deg(2XP_n) \leq n+1$ et $\deg\left(\dfrac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'\right) \leq n+1$

   Comme $P_{n+1} = 2XP_n - \dfrac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'$,
   alors $\deg(P_{n+1}) \leq \max\Big(\deg(2XP_n), \deg(\dfrac{1}{n+1}(1+X^2)P_n')\Big)$, on en déduit que $\deg(P_{n+1}) \leq n+1$

   $\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence, } \forall n \in \mathbb{N} \quad \deg(P_n) \leq n}$ **(1 pt)**

   (c) Le coefficient devant X^{n+1} dans $2XP_n$ est égal à $2a_n$.
   Le coefficient devant X^{n-1} dans P_n' est égal à na_n,
   et donc le coefficient devant X^{n+1} dans $\dfrac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'$ est égal à $\dfrac{na_n}{n+1}$
   En identifiant les coefficients de degré $n+1$ dans la relation de récurrence, on a :

   $$a_{n+1} = 2a_n - \frac{na_n}{n+1} \quad \text{c'est-a-dire} \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$$

   La suite de terme général $\dfrac{a_n}{n+1}$ est donc constante, égale à son premier terme a_0.

   On en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = n+1}$

   Comme $\deg(P_n) \leq n$ et le coefficient devant X^n est non nul, on a $\boxed{\deg(P_n) = n}$ **(1.5 pt)**

2. Soit $\mathcal{P}_n$: $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

   $P_0(-X) = 1 = (-1)^0 P_0(X)$, ce qui justifie que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$.

   On commence par expliquer la relation qu'il y a entre $P_n'(-X)$ et $P_n'(X)$:

   On a : $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.
   On **dérive** cette relation : $-P_n'(-X) = (-1)^n P_n'(X)$.

   On utilise la relation de récurrence :

   $$\begin{aligned}
   P_{n+1}(-X) &= 2(-X)P_n(-X) - \frac{1}{n+1}\big(1+(-X)^2\big)P_n'(-X) \\
   &= (-1)^{n+1}2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}\big(1+X^2\big)(-1)^{n+1}P_n'(X) \\
   &= (-1)^{n+1}\left(2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'(X)\right) \\
   &= (-1)^{n+1}P_{n+1}(X)
   \end{aligned}$$

   $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   $\boxed{\text{Ainsi, on a montré que } \forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)}$ **(1.5 pt)**

3. (a) Soit $\mathcal{P}_n$: $P_{n+1}' = (n+2)P_n$.

   $\mathcal{P}_{\prime}$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P_{n+2} &= 2XP_{n+1} - \frac{1}{n+2}(1+X^2)P'_{n+1} \qquad \text{et } P'_{n+1} = (n+2)P_n \\
&= 2XP_{n+1} - (1+X^2)P_n \\
\text{d 'où } P'_{n+2} &= 2P_{n+1} + 2XP'_{n+1} - 2XP_n - (1+X^2)P'_n \\
&= 2P_{n+1} + \underbrace{2(n+2)XP_n - 2XP_n}_{=2(n+1)XP_n} - (1+X^2)P'_n \\
&= 2P_{n+1} + (n+1) \times \left[2XP_n - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n\right] \\
&= 2P_{n+1} + (n+1)P_{n+1} \\
&= (n+3)P_{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad P'_{n+1} = (n+2)P_n}$ **(2 pts)**

(b) On évalue en 0 la relation $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - \frac{1}{n+2}(1+X^2)P'_{n+1}$,
on obtient $P_{n+2}(0) = -\frac{1}{n+2}P'_{n+1}(0)$

On évalue en 0 la relation $P'_{n+1} = (n+2)P_n$, on obtient $P'_{n+1}(0) = -(n+2)P_n(0)$

Ainsi, on trouve $P_{n+2}(0) = -P_n(0)$.

Comme $P_0(0) = 1$, on déduit alors que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{2n}(0) = (-1)^n$
Comme $P_1(0) = 0$, on déduit alors que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{2n+1}(0) = 0$ **(1.5 pt)**

Remarque : on a d'après la question 2, $P_{2n+1}(X) = -P_{2n+1}(X)$
En évaluant en 0, on retrouve : $P_{2n+1}(0) = 0$

(c) On déduit de la question 3a :

$$\int_0^x (n+2)P_n(t)dt = \Big[P_{n+1}(t)\Big]_0^x$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R} \quad P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2)\int_0^x P_n(t)dt}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_3(x) = P_3(0) + 4\int_0^x P_2(t)dt = 4\Big[t^3 - t\Big]_0^x = 4x^3 - 4x.$

Le polynôme $P_3 - 4X^3 + 4X$ admet donc une infinité de racines, donc est nul. $\boxed{\text{Ainsi, } P_3 = 4X^3 - 4X}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_4(x) = P_4(0) + 5\int_0^x P_3(t)dt = 1 + 5\Big[t^4 - 2t^2\Big]_0^x = 5x^4 - 10x^2 + 1.$

$\boxed{\text{On en déduit, comme précédemment que : } P_4 = 5X^4 - 10X^2 + 1}$ **(1.25 pt)**

4. (a) En utilisant la question 3a, on obtient immédiatement le résultat :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - \frac{1}{n+2}(1+X^2)P'_{n+1} = 2XP_{n+1} - (1+X^2)P_n \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

(b) $u_{n+2} - 2xu_{n+1} + (1+x^2)u_n = 0$.
$(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 2xr + (1+x^2) = 0$, de discriminant $\Delta = -4$.
Les racines de cette équation caractéristique sont : $x+i$ et $x-i$.
Il existe des complexes C_1 et C_2 tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = C_1(x+i)^n + C_2(x-i)^n$.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} C_1 & + & C_2 & = & 1 \quad (1) \\ (x+i)C_1 & + & (x-i)C_2 & = & 2x \quad (2) \end{array}\right.$$

$(2) - (x-i) \times (1)$ donne $2iC_1 = x+i$ et $(2) - (x+i) \times (1)$ donne $-2iC_2 = x - i$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{2i}\left[(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}\right]} \quad \textbf{(2.25 pts)}$$

(c) Le polynôme $P_n - \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right]$admet donc une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

$\boxed{P_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right]}$ **(0.25 pt)**

Exercice 2 : polynômes réciproques

1. $(X-1)^n$ est de degré n, et d'après la formule du binôme, $(X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}X^k$.

   Notons a_k le coefficient de degré k de ce polynôme. On a donc : $a_k = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}$

   • si n est pair : alors $(-1)^n = 1$, d'où $(-1)^{n-k} = (-1)^k$.
   Par conséquent, $\forall k \in [\![0\,,\,n]\!]\quad a_{n-k} = (-1)^k\binom{n}{n-k} = (-1)^{n-k}\binom{n}{k} = a_k$.
   $(X-1)^n$ est un polynôme réciproque.

   • si n est impair : le coefficient de degré n vaut 1, et le coefficient de degré 0 vaut -1.
   $(X-1)^n$ n'est pas un polynôme réciproque.

   $\boxed{(X-1)^n \text{ est un polynôme réciproque si et seulement si } n \text{ est pair}}$

   (1.5 pt + 0.25 pt de bonus pour preuve bien structurée)

2. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

   On a : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} \underset{i=n-k}{=} \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^i = \widehat{P}(z)$. **(1 pt)**

   Supposons P réciproque, alors $\widehat{P} = P$, d'où $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^n P\Big(\frac{1}{z}\Big)$ **(0.25 pt)**

   Supposons $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^n P\Big(\frac{1}{z}\Big)$
   Alors $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \widehat{P}(z) = P(z)$
   Ainsi, le polynôme $P - \widehat{P}$ admet une infinité de racines donc est le polynôme nul : $P = \widehat{P}$. **(0.75 pt)**

   $\boxed{P \text{ est un polynôme réciproque si et seulement si } \forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^n P\Big(\frac{1}{z}\Big)}$

3. (a) Soient P_1 et P_2 deux polynômes réciproques de degré respectivement n_1 et n_2.
   Alors P_1P_2 est un polynôme de degré $n_1 + n_2$ qui vérifie :

   $$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad (P_1P_2)(z) = P_1(z) \times P_2(z) = z^{n_1}P_1\left(\frac{1}{z}\right) \times z^{n_2}P_2\left(\frac{1}{z}\right) = z^{n_1+n_2}(P_1P_2)\left(\frac{1}{z}\right)$$

   $\boxed{\text{Donc } P_1P_2 \text{ est un polynôme réciproque}}$ **(1.25 pt)**

   (b) S est un polynôme de degré $n - q$.
   On a $P = QS$, donc $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(\frac{1}{z}) = Q(\frac{1}{z})S(\frac{1}{z})$.

   On multiplie par z^n :

   $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad z^n P(\frac{1}{z}) = z^q Q(\frac{1}{z}) \times z^{n-q} S(\frac{1}{z})$.

   Or P et Q sont des polynômes réciproques, et S est un polynôme de degré $n - q$, donc :
   $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^n P(\frac{1}{z})$, $Q(z) = z^q Q(\frac{1}{z})$ et $\widehat{S}(z) = z^{n-q} S(\frac{1}{z})$.

   On obtient alors : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = Q(z)\widehat{S}(z)$.

   Comme $P = QS$, on a également : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = Q(z)S(z)$.
   On en déduit que : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad Q(z)S(z) = Q(z)\widehat{S}(z)$

   Le polynôme Q admet au plus q racines distinctes.
   Il existe donc une infinité de valeurs de z tels que $Q(z) \neq 0$ et on obtient pour ces valeurs :

   $$S(z) = \widehat{S}(z)$$

Le polynôme $S - \widehat{S}$ admet donc une infinité de racines : il est nul
et $\boxed{\text{ainsi } S \text{ est un polynôme réciproque}}$ **(2.5 pts)**

4. P est un polynôme réciproque, donc $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^n P\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$
Pour $z = -1$, on obtient : $P(-1) = (-1)^n P(-1)$.
Or n est impair, donc $(-1)^n = -1$ et ainsi, $P(-1) = 0$.
$\boxed{P \text{ est donc divisible par } (X+1)}$ et d'après la question 2b, comme $X + 1$ est un polynôme réciproque,
$\boxed{\text{le quotient de } P \text{ par } (X+1) \text{ est un polynôme réciproque}}$ **(1.25 pt)**

5. (a) On pose $B = aX^2 + bX + c$.
$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad B\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = a\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)^2 + b\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) + c$
D'où, $\quad z^2 B\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = az^4 + bz^3 + (2a + c)z^2 + bz + a$.
Pour $a = 5$, $b = -24$ et $c = 16$, on a donc : $\quad z^2 B\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = A(z)$. **(1.25 pt)**

(b) Les racines de $B = 5X^2 - 24X + 16$ sont 4 et 4/5.
$A(0) \neq 0$, et pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a : $A(z) = 0 \iff B(z + \frac{1}{z}) = 0$

$$\begin{aligned} &\iff z + \frac{1}{z} = 4 \text{ ou } z + \frac{1}{z} = 4/5 \\ &\iff z^2 - 4z + z = 0 \text{ ou } z^2 - \tfrac{4}{5}z + 1 = 0 \\ &\iff z = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } z = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } z = \frac{2 + i\sqrt{21}}{5} \text{ ou } z = \frac{2 - i\sqrt{21}}{5} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, les racines de } A \text{ sont } 2 + \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3},\ \dfrac{2 + i\sqrt{21}}{5},\ \dfrac{2 - i\sqrt{21}}{5}}$ **(2.5 pts)**

(c) $\boxed{A = 5\big(X - 2 - \sqrt{3}\big)\big(X - 2 + \sqrt{3}\big)\big(X^2 - \dfrac{4}{5}X + 1\big)}$ **(0.75 pt)**

6. (a) Soit $\mathcal{P}_n$: $\deg(R_n) = n$, le coefficient dominant de R_n est 1,
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.
Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ vraies pour un entier $n \geq 2$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a : $R_{n+1} = XR_n - R_{n-1}$.
Comme $\deg(XR_n) = n + 1$ et $\deg(R_{n-1}) = n - 1$, les degrés étant distincts, on en déduit que :
$$\deg(R_{n+1}) = \max(\deg(XR_n), \deg(R_{n-1})) = n + 1$$
Le coefficient dominant de R_{n+1} est égal au coefficient dominant de XR_n, donc égal à 1.
Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
$\boxed{R_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ unitaire (\textit{ie} de coefficient dominant égal à 1)}}$ **(2 pts)**

(b) Soit $\mathcal{P}_n : \forall z \in \mathbb{C}^* \quad R_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
$R_1\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z}$: $\mathcal{P}_1$ est vraie.
$R_2\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + \dfrac{1}{z^2}$, donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ vraies pour un entier $n \geq 2$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a :
$$\begin{aligned} R_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(z + \frac{1}{z}\right) R_n\left(z + \frac{1}{z}\right) - R_n\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) - \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) \\ &= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}. \quad \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, d'après les principe de récurrence,} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad R_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}}$ **(1.5 pt)**

(c) On pose $z = e^{i\theta}$.

$z + \dfrac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ (d'après les formules d'Euler).

$$\begin{aligned} R_n(2\cos(\theta)) &= R_n\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= z^n + \frac{1}{z^n} \\ &= e^{in\theta} + e^{-in\theta} \\ &= 2\cos(n\theta) \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

(d) D'après la relation précédente, l'équation $R_n(2\cos(\theta)) = 0$ est équivalente à l'équation $\cos(n\theta) = 0$ avec $n\theta \in [0, n\pi]$.

La fonction cos s'annule exactement n fois sur l'intervalle $[0, n\pi]$, aux points $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } R_n(2\cos(\theta)) = 0 \text{ admet } n \text{ solutions dans } [0,\pi] \text{ : les réels } \frac{(2k+1)\pi}{2n} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!].}$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \in]0,\pi[$, et la fonction cos est injective sur $]0,\pi[$, les réels $x_k = 2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ sont deux à deux distincts, appartiennent à l'intervalle $]-2,2[$ et sont des racines de R_n. R_n, étant de degré n, ne possède pas d'autres racines que les réels $(x_k)_{0\leq k\leq n-1}$.

$\boxed{\text{Le polynôme } R_n \text{ admet donc } n \text{ racines réelles dans }]-2,2[}$ **(3 pts)**

(e) Comme $\deg(R_n) = 1$ et R_n est unitaire, on en déduit que $\boxed{R_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}$ **(0.5 pt)**

Cette dernière écriture correspond à la décomposition de R_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

(f) **<u>Existence :</u>**

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2q} a_k X^k$.

Comme P est réciproque, pour tout $k \in [\![0, 2q]\!]$, $a_{2q-k} = a_k$ et on peut alors écrire :

$P = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} a_k(X^k + X^{2q-k}) + a_q X^q$.

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^q\left[\sum_{k=0}^{q-1} a_k\left(\frac{1}{z^{q-k}} + z^{q-k}\right) + a_q\right] = z^q\left[\sum_{k=0}^{q-1} a_k R_{p-k}\left(z + \frac{1}{z}\right) + a_q\right]$$

Le polynôme $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} a_k R_{q-k} + a_q$ vérifie : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P(z) = z^q T(z + \frac{1}{z})$.

$T = a_0 R_q + \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} a_k R_{q-k} + a_q$.

Le polynôme $a_0 R_q$ est de degré q, et le polynôme $\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} a_k R_{q-k} + a_q$ appartient à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$.

Donc $\deg(T) = q$.

<u>Unicité :</u>

Soient T_1 et T_2 deux polynômes vérifiant les conditions requises.
Alors $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad T_1(z + \frac{1}{z}) = T_2(z + \frac{1}{z})$.
Les nombres complexes $z + \frac{1}{z}$, avec $z \in \mathbb{C}^*$, sont donc des racines de $T_1 - T_2$.
Comme la fonction $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ prend une infinité de valeurs, le polynôme $T_1 - T_2$ admet donc une infinité de racines.
Par conséquent, le polynôme $T_1 - T_2$ est le polynôme nul. Ainsi, $T_1 = T_2$.
