PRÉPARATION À L'INTERROGATION DU MARDI 25 FÉVRIER

Question : déterminer le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \ln\big(\mathrm{ch}(x) + 2x\big)$ **(3.5 pts)**

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} u(x) - \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u^3(x)}{3} - \frac{u^4(x)}{4} + \mathrm{o}(x^4) \text{ avec } u(x) \underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)$$

$$u^2(x) \underset{x\to 0}{=} 4x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^4)$$

$$u^3(x) \underset{x\to 0}{=} 8x^3 + 6x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

$$u^4(x) \underset{x\to 0}{=} 16x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

D'où $f(x) \underset{x\to 0}{=} 2x + \left(\frac{1}{2} - 2\right)x^2 + \left(-1 + \frac{8}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + 2 - 4\right)x^4 + \mathrm{o}(x^4)$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f(x) \underset{x\to 0}{=} 2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{25x^4}{12} + \mathrm{o}(x^4)}$$

Question : (3.5 pts) déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{\ln(1+x)}$.

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right) \times \left(1 - u(x) + u^2(x) + o(x^2)\right) \qquad \text{avec } u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)$$

$$u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2)$$

D'où $f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{x}{2} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{=-\frac{1}{12}} x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right)$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\right) x^2 + \mathrm{o}(x^2)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2)}$$

Question : QCM (3 pts)

a) $\boxed{18}$ *en effet, d'après la formule de Taylor-Young, le coefficient de x^3 est $\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}$, d'où $f^{(3)}(0) = 3 \times 3! = 18$*

b) $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 - 3x^2 + 4x^3 + \mathrm{o}(x^3)}$

De ce développement limité, on déduit que $f(0) = 2$ et $f(x) - 2 \underset{x\to 0}{\sim} -3x^2$, donc au voisinage de 0, $f(x) - 2 \leq 0$
Ainsi, au voisinage de 0, $f(x) \leq f(0)$

c) $\boxed{x}$ *en effet, le quotient $\dfrac{2x + \sqrt{x}}{x}$ tend vers 2 et non vers 0*

d) $\boxed{\sqrt{u_n}}$ *en effet, le quotient $\dfrac{\sqrt{u_n}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$ tend vers 0*

e) $\boxed{n^2}$ *en effet, $(n+1)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$*

f) $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} n + \mathrm{o}(1)}$ *en effet, $u_n = n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{e^{u_n}}{e^n} = e^{\varepsilon_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$*

Question : (1.5 pts)

On définit les suites u et v par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

- Donner un développement asymptotique de v_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$: $\boxed{v_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$

• Déterminer un équivalent de $u_n - e$:

$u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(nv_n\right)$

$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(1-\dfrac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(1)\times\exp\left(-\dfrac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ *en utilisant* $\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$

D'où : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} e\left(1-\dfrac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ *en utilisant* $\exp(x)\underset{x\to0}{=}1+x+\mathrm{o}(x)$

On en déduit : $\boxed{u_n - e \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{e}{2n}}$

Exercice 1 : analyse

1. **Approximation rationnelle de la fonction** cos **au voisinage de 0 :**

   (a) $f(x) \underset{x\to0}{=} \left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+\mathrm{o}(x^6)\right)-\left(1+ax^2\right)\left(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+\mathrm{o}(x^6)\right)$

   $\underset{x\to0}{=} \left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+\mathrm{o}(x^6)\right)-\left(1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+(ab^2-b^3)x^6+\mathrm{o}(x^6)\right)$

   $\boxed{\text{Ainsi, } f(x) \underset{x\to0}{=} \left(b-a-\dfrac{1}{2}\right)x^2+\left(ab-b^2+\dfrac{1}{24}\right)x^4+\left(b^3-ab^2-\dfrac{1}{720}\right)x^6+\mathrm{o}(x^6)}$

   (b) Pour que $f(x)$ soit négligeable devant x^4 au voisinage de 0, il faut et il suffit que $b-a-\dfrac{1}{2}=0$ et $ab-b^2+\dfrac{1}{24}=0$.

   On résout le système : $\begin{cases} b-a=\dfrac{1}{2} \\ b(b-a)=\dfrac{1}{24}\end{cases}$, qui est équivalent à $\begin{cases} b-a=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{24}\end{cases}$

   $\boxed{\text{On obtient ainsi } b=\dfrac{1}{12} \text{ puis } a=-\dfrac{5}{12}}$

2. **Étude d'une suite définie implicitement :**

   (a) La fonction f_n est dérivable et $\forall x\in[0,1] \quad f_n'(x)=5x^4+n>0$.
   f_n est strictement croissante et continue, donc réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[-1,n]$ qui contient 0.

   $\boxed{\text{L'équation } f_n(x)=0 \text{ d'inconnue } x\in[0,1] \text{ possède une unique solution } u_n}$

   (b) $f_n(u_n)=0$, donc $u_n=\dfrac{1}{n}\times(1-u_n^5)$.
   De plus, $0\le u_n\le 1$, d'où $0\le u_n^5\le1$, puis $0\le 1-u_n^5\le 1$.
   Par conséquent, $\dfrac{1}{n}\times(1-u_n^5)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ (produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée)

   $\boxed{\text{On a montré que } \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0}$

   (c) Comme $u_n^5\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, alors $1-u_n^5\underset{n\to+\infty}{\sim}1$.
   Et $u_n=\dfrac{1-u_n^5}{n}$, $\boxed{\text{donc } u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}}$

   (d) $f_n(u_n)=0$, donc $u_n^5=1-nu_n$, ce qui donne : $u_n^5=n(\dfrac{1}{n}-u_n)$.
   D'où $u_n-\dfrac{1}{n}=-\dfrac{u_n^5}{n}$.
   Or $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$, donc $u_n^5\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^5}$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } u_n-\dfrac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{n^6}}$

Exercice 2 : analyse

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de deux fonctions continues.
   De plus, $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1 = f(0)$: la fonction f est continue en 0.

   $\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

   Déterminons le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0. La présence de x au numérateur nous incite à partir d'un développement limité de $e^x - 1$ à l'ordre 3 :

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

   Ainsi, nous obtenons :

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)}$$

   Or, nous savons que $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + \mathrm{o}(u^2)$.
   Appliqué ici avec $u(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, nous obtenons :

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + \mathrm{o}(x^2)$$

   Développons en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2)$$

   $\boxed{\text{Ainsi, } \dfrac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2)}$

   La fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, donc est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

2. (a) De l'unicité du développement limité de f, on déduit les relations : $b_0 = 1$, $b_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{b_2}{2} = \dfrac{1}{12}$, donc $b_2 = \dfrac{1}{6}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a : $g(x) = \dfrac{2x}{e^{2x}-1} + x = x \times \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$
   Et : $g(-x) = -x \times \dfrac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1} = -x \times \dfrac{e^{-2x}(1+e^{2x})}{e^{-2x}(1-e^{2x})} = g(x)$
   On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g(-x) = g(x)$.
   Comme $g(0) = 0$, la relation s'étend au point $x = 0$.

   $\boxed{\text{Ainsi, la fonction } g \text{ est paire}}$

   Du développement limité de f, on déduit :

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!}\,(2x)^k + x + \mathrm{o}(x^n) = b_0 + (2b_1 - 1)x + \sum_{k=2}^{n} \frac{b_k 2^k}{k!}\,x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

   Or la fonction g est paire, donc les coefficients des termes impairs de son développement limité sont nuls, d'où $2b_1 + 1 = 0$ (ce qu'on savait déjà) et : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad b_{2k+1} = 0}$

   (c) On note $h(x) = e^x - 1$.
   Pour $n \geq 1$, on dérive $n+1$ fois la relation $f(x) \times h(x) = x$ en utilisant la formule de Leibniz :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) h^{(n+1-k)}(x) = 0$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $h^{(n+1-k)}(x) = e^x$ et pour $k = n+1$, on a $h^{(n+1-k)}(x) = e^x - 1$. D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)e^x + f^{(n+1)}(x)(e^x - 1) = 0$$

En évaluant en 0, on obtient bien la relation : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0}$

On sait que $\boxed{b_3 = b_5 = 0}$

La relation précédente permet de calculer de proche en proche les nombres de Bernoulli en isolant le dernier terme :

$$(n+1)b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$$

$5b_4 = -\sum_{k=0}^{3} \binom{5}{k} b_k = -(b_0 + 5b_1 + 10b_2) = -\dfrac{1}{6}$, d'où $\boxed{b_4 = -\dfrac{1}{30}}$

$7b_6 = -\sum_{k=0}^{5} \binom{7}{k} b_k = -(b_0 + 7b_1 + 21b_2 + 35b_4) = \dfrac{1}{6}$, d'où $\boxed{b_6 = \dfrac{1}{42}}$

3. (a) On montre par le calcul que la relation de l'énoncé est bien vérifiée pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} xf'(x) + (x-1)f(x) + f^2(x) &= x \times \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} + \frac{x^2 - x}{e^x - 1} + \frac{x^2}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{xe^x - x - x^2e^x + (x^2 - x)(e^x - 1) + x^2}{(e^x-1)^2} = 0 \end{aligned}$$

Cette relation est également vraie au point $x = 0$ (car $f(0) = 1$).

(b) D'après ce qui précède, la fonction φ est nulle.

On utilise la formule de Leibniz pour obtenir l'expression suivante de $\varphi^{(2n)}(x)$:

$$\varphi^{(2n)}(x) = xf^{(2n+1)}(x) + 2nf^{(2n)}(x) + (x-1)f^{(2n)}(x) + 2nf^{(2n-1)}(x) + \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} f^{(k)}(x)f^{(2n-k)}(x)$$

On évalue au point 0 : $\varphi^{(2n)}(0) = 0 = 2nb_{2n} - b_{2n} + 2nb_{2n-1} + \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} b_k b_{2n-k}$

Or les nombres de Bernoulli d'indice impair sont nuls à partir de 3.

En particulier, comme $n \geq 2$, alors $b_{2n-1} = 0$.

On obtient alors : $(2n-1)b_{2n} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} b_k b_{2n-k} = 0$

$$(2n-1)b_{2n} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} b_{2k} b_{2n-2k} = 0$$

On sort le premier et le dernier terme de la somme :

$$(2n-1)b_{2n} + b_0 b_{2n} + b_{2n} b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} b_{2k} b_{2n-2k} = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \geq 2 \qquad (2n+1)b_{2n} = -\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} b_{2k} b_{2n-2k}}$$

(c) Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : b_{2n} est du signe de $(-1)^{n+1}$.

$b_2 = \frac{1}{6}$ est du signe de $(-1)^2$: $\mathcal{P}_1$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, ..., $\mathcal{P}(n-1)$ vraies pour un entier $n \geq 2$.

Alors, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, b_{2k} est du signe de $(-1)^{k+1}$ et b_{2n-2k} est du signe de $(-1)^{n-k+1}$.

Le produit $b_{2k}b_{2n-2k}$ est alors du signe de $(-1)^n$.

Or $(2n+1)b_{2n} = -\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} b_{2k} b_{2n-2k}$, et tous les termes de la somme sont du signe de $(-1)^n$.

Par conséquent, b_{2n} est du signe de $(-1)^{n+1}$: $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } b_{2n} \text{ est du signe de } (-1)^{n+1}}$

4. (a) La fonction $H : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction F l'est également (par hypothèse), donc G est de classe C^n sur $\mathbb{R}^*$ (comme produit de deux fonctions de classe C^n), et d'après la formule de Leibniz : $\quad \forall p \in [\![0, n]\!] \quad G^{(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} H^{(k)} F^{(p-k)}$

Comme $H^{(k)}(x) = \dfrac{(1)^k k!}{x^{k+1}}$, on obtient le résultat souhaité.

(b) Soit (k, p) un couple d'entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$.
Comme F est de classe C^{n+1}, alors $F^{(p-k)}$ est de classe $C^{n+1-p+k}$, et donc aussi de classe C^{k+1}.
D'après la formule de Taylor-Young, on a au voisinage de 0 :

$$F^{(p-k)}(x) \underset{0}{=} \sum_{i=0}^{k+1} \underbrace{\frac{F^{(p+i-k)}(0)}{i!} x^i}_{=0} + \mathrm{o}(x^{k+1})$$

$\boxed{F^{(p-k)}(x) \text{ est ainsi négligeable devant } x^{k+1} \text{ au voisinage de } 0}$

(c) On obtient alors $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F^{(p-k)}(x)}{x^{k+1}} = 0$ (pour tout entier k compris entre 0 et p).

On en déduit (avec la relation de la question a) que $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to 0} G^{(p)}(x) = 0}$

(d) On démontre par récurrence la proposition $\mathcal{H}_p$: G est de classe C^p sur $\mathbb{R}$.
Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0} G(x) = 0 = G(0)$, G est continue en 0.
G étant également continue sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que G est continue sur $\mathbb{R}$.
$\mathcal{H}_0$ est vraie.

Supposons $\mathcal{H}_{p-1}$ vraie pour un entier $p \in [\![1, n]\!]$.
$G^{(p-1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $(G^{(p-1)})'(x) = G^{(p)}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$
D'après le théorème de la limite de la dérivée, $G^{(p-1)}$ est dérivable en 0 et $G^{(p)}(0) = 0$.
De plus, $G^{(p)}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$: G est de classe C^p.
$\mathcal{H}_p$ est vraie.
On a montré par récurrence que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la fonction G est de classe C^p sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est de classe } C^n \text{ sur } \mathbb{R}}$

(e) On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^x - 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$.

F est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.
F admet un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de 0 : $F(x) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}(x^{n+1})$.
Ce qui prouve que $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $F^{(k)}(0) = 0$.

D'après ce qui précède, la fonction G définie sur $\mathbb{R}^*$ par $G(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ et prolongée au point 0 en posant $G(0) = 0$ est de classe C^n.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^x - 1}{x} = G(x) + \underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{k!}}_{=P(x)}$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{f(x)} = G(x) + P(x)$.

Cette relation s'étend au point 0 vu que $\dfrac{1}{f(0)} = 1$, $G(0) = 0$ et $P(0) = 1$.
Or P est de classe C^n.
Par conséquent, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas.
$\boxed{\text{Son inverse } f \text{ est donc aussi de classe } C^n \text{ sur } \mathbb{R}}$

Compléments :
Les nombres de Bernoulli apparaissent dans de très nombreuses applications : formule d'Euler-Maclaurin, étude de la fonction zêta de Riemann, développements limités des fonctions tan et th au voisinage de 0.

On montre en effet que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad th(x) = \dfrac{g(2x) - g(x)}{x}$, *ce qui permet de déterminer le développement limité d'ordre* $2n-1$ *au voisinage de 0 de la fonction th.*

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a vu à la question 2b que $g(x) = x \times \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

$g(2x) - g(x) = 2x \times \dfrac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1} - x \times \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

D'où $\dfrac{g(2x)-g(x)}{x} = 2 \times \dfrac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1} - \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \dfrac{2(e^{4x}+1)(e^{2x}-1) - (e^{4x}-1)(e^{2x}+1)}{(e^{4x}-1)(e^{2x}-1)}$

On note N le numérateur de ce quotient.

$N = 2(e^{6x} - e^{4x} + e^{2x} - 1) - (e^{6x} + e^{4x} - e^{2x} - 1)$

$\quad = e^{6x} - 3e^{4x} + 3e^{2x} - 1$

$\quad = (e^{2x}-1)^3 \qquad$ (formule du binôme)

Au dénominateur, on utilise l'identité remarquable suivante : $e^{4x} - 1 = (e^{2x}-1)(e^{2x}+1)$

$\dfrac{g(2x)-g(x)}{x} = \dfrac{(e^{2x}-1)^3}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)(e^{2x}-1)} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Et $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{th}(x) = \dfrac{g(2x)-g(x)}{x}}$

La fonction th étant impaire, les coefficients de rang pair de son développement limité au voisinage de 0 sont nuls.

$$g(2x) \underset{x\to 0}{=} b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}2^{2k}}{(2k)!}(2x)^{2k} + \mathrm{o}(x^{2n}) \quad \text{et } g(x) \underset{x\to 0}{=} b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}2^{2k}}{(2k)!}\, x^{2k} + \mathrm{o}(x^{2n})$$

$\boxed{\text{D'où } \mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} x^{2k-1} + \mathrm{o}(x^{2n-1})}$

On montre également que : $\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_{2k}| \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} x^{2k-1} + \mathrm{o}(x^{2n})}$

Il y a également un lien entre les nombres de Bernoulli et la suite de nombres $(a_n)_{n\geq 0}$ *étudiée lors de l'exercice 3 du devoir surveillé 6 :* $\boxed{b_n = n!\, a_n}$

Les polynômes $n!\, A_n(X)$ *sont appelés polynômes de Bernoulli.*
