Programme de colle pour la semaine du 17 mars

mathématiques MPSI : semaine 21

---

1. **Somme de deux sous-espaces vectoriels :**
   Somme de deux sous-espaces. Premiers résultats.
   $\text{Vect}(x_1, ..., x_n)+ \text{Vect}(y_1, ..., y_p) = \text{Vect}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_p)$ .
   Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.
   Sous-espaces supplémentaires.

2. **Espace vectoriel de dimension finie :**

   Un espace vectoriel est de dimension finie lorsqu'il possède une famille génératrice finie.
   Existence de bases en dimension finie.
   Théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite.

   Dans un espace vectoriel engendré par $n$ vecteurs, toute famille de $p$ vecteurs (avec $p > n$) est liée, et toute famille libre a un nombre d'éléments inférieur ou égal à $n$.
   Dimension d'un espace de dimension finie.
   Dimension des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
   En dimension $n$, une famille de $n$ vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.
   Dimension d'un produit d'espaces vectoriels de dimension finie.
   Rang d'une famille finie de vecteurs.

3. **Sous-espaces et dimension :**

   Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.
   Sous-espaces supplémentaires en dimension finie :
   - En séparant en deux une base de $E$, on obtient des bases de sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$.
   - En réunissant les bases de deux sev supplémentaires de $E$, on obtient une base de $E$.

   Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire.
   Dimension d'une somme : formule de Grassmann. Caractérisation des sommes directes.
   Caractérisation des couples de sous-espaces supplémentaires.