

EXERCICE : SOUS-ESPACES VECTORIELS DE \mathbb{R}^4

1. **Barème : 2 points** (1 point pour la résolution du système avec l'introduction de 2 paramètres, 0.5 point pour la mise en évidence d'une famille génératrice, 0.5 point pour la justification que la famille est libre)

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} 2x - 4y + z + t = 0 \\ 3x - y + 4z - t = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x - 4y + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow \frac{1}{5}(L_1 + L_2) \\
 &\iff \begin{cases} x = x \\ y = x + z \\ z = z \\ t = 2x + 3z \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit que $F = \{(x, x + z, z, 2x + 3z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 0, 2)$ et $v = (0, 1, 1, 3)$

Les deux vecteurs u et v forment une famille génératrice de F . Comme de plus, ils ne sont pas colinéaires, ils sont linéairement indépendants.

Ainsi, la famille (u, v) est une base de F

2. **Barème : 2 points** (0.5 point pour la relation linéaire exprimant c en fonction de a et b , 1.5 point pour les équations linéaires caractérisant G)

On a : $c = 3a + 2b$. Par conséquent, $G = \text{Vect}(a, b)$.

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in G &\iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \lambda_1 a + \lambda_2 b = (x, y, z, t) \\
 &\iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = y \\ \lambda_1 + \lambda_2 = z \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = z \end{cases} \\
 &\iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x \\ -\lambda_1 = y + x \\ 2\lambda_1 = z + x \\ 3\lambda_1 = 2x + t \end{cases} \\
 &\iff -(y + x) = \frac{z + x}{2} \text{ et } -(y + x) = \frac{2x + t}{3} \\
 &\iff 3x + 2y + z = 0 \text{ et } 5x + 3y + t = 0.
 \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations caractérisent les éléments de G :

$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 2y + z = 0 \text{ et } 5x + 3y + t = 0\}$

3. **Barème : 2 points**

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in F \cap G &\iff \begin{cases} 2x - 4y + z + t = 0 \\ 3x - y + 4z - t = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 3y + t = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x - 4y + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 3x + 7y - z = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow \frac{1}{5}(L_1 + L_2) \\
 & & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\
 &\iff \begin{cases} 2x - 4y + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
 & & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \\
 &\iff \begin{cases} x = x \\ y = -\frac{2}{3}x \\ z = y - x = -\frac{5}{3}x \\ t = 4y - 2x - z = -3x \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $F \cap G = \{(x, -\frac{2}{3}x, -\frac{5}{3}x, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$F = \text{Vect}((3, -2, -5, -9))$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $w = (3, -2, -5, -9)$

4. **Barème : 0.75 point**

On vérifie aisément que $u \in H$ et $v \in H$ (les composantes de ces deux vecteurs vérifient l'équation de H).

On en déduit que $\text{Vect}(u, v) \subset H$, donc $F \subset H$

De même, $a \in H$ et $b \in H$, donc $G \subset H$

5. Barème : 2 points

Méthode 1 : on détermine une équation de l'espace vectoriel $F + G$

$$F + G = \text{Vect}(u, v, a, b).$$

$$(x, y, z, t) \in F + G \iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 a + \lambda_4 b = (x, y, z, t)$$

$$\iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = x \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & -2\lambda_3 & +\lambda_4 & = y \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = z \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & = t \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = x \\ & \lambda_2 & -3\lambda_3 & +2\lambda_4 & = y - x \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = z \\ 3\lambda_2 & -\lambda_3 & +4\lambda_4 & & = t - 2x \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = x \\ & \lambda_2 & -3\lambda_3 & +2\lambda_4 & = y - x \\ & 4\lambda_3 & -\lambda_4 & & = z - y + x \\ & 8\lambda_3 & -2\lambda_4 & & = t + x - 3y \end{cases}$$

$$\iff 2(z - y + x) = t + x - 3y$$

$$\iff x + y + 2z - t = 0 \quad \text{on reconnaît l'équation de } H$$

Ainsi, $F + G = H$

Méthode 2 : on procède par double inclusion

F et G sont des sous-espaces vectoriels de H , donc $F + G \subset H$.

$$(x, y, z, t) \in H \iff x + y + 2z - t = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z \\ t = x + y + 2z \end{cases}$$

On en déduit que $H = \{(x, y, z, x + y + 2z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(w_1, w_2, w_3)$ avec $w_1 = (1, 0, 0, 1)$ et $w_2 = (0, 1, 0, 1)$ et $w_3 = (0, 0, 1, 2)$

On rappelle que $F = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 0, 2)$ et $v = (0, 1, 1, 3)$ et $G = \text{Vect}(a, b)$.

On vérifie que :

- $w_1 = \frac{3}{4}u - \frac{1}{4}v + \frac{1}{4}a$
- $w_2 = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{4}a$
- $w_3 = -\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}a$

Cela prouve que $w_1 \in F + G$, $w_2 \in F + G$ et $w_3 \in F + G$

On en déduit que : $\text{Vect}(w_1, w_2, w_3) \subset F + G$, c'est-à-dire : $H \subset F + G$.

Méthode 3 : on utilise les résultats sur les dimensions

F et G sont des sous-espaces vectoriels de H , donc $F + G \subset H$.

On sait également que : $\dim(F) = 2$, $\dim(G) = 2$ et $\dim(F \cap G) = 1$.

Donc d'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3$.

Comme $F + G \subset H$, on a $\dim(F + G) \leq \dim(H)$, donc $3 \leq \dim(H)$.

De plus, H est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 distinct de \mathbb{R}^4 , donc $\dim(H) < 4$.

On en déduit que $\dim(H) = 3$.

On a ainsi $F + G \subset H$ et $\dim(F + G) = \dim(H)$: par conséquent, $F + G = H$

1. Exercice 1 :

$$e_1 = (1, 0) \text{ et } e_2 = (0, 1) \text{ engendrent l'espace } \mathbb{R}^2, \text{ donc } \text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}\left(\underbrace{(1, 1, -1)}_{v_1}, \underbrace{(1, -2, 3)}_{v_2}\right).$$

v_1 et v_2 étant non colinéaires, ces deux vecteurs forment une base de $\text{Im}(f)$.

Ainsi, $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Comme $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^2)$, alors f est injective : $\text{Ker}(f) = \{0\}$

On peut aussi déterminer $\text{Ker}(f)$ en résolvant le système $f(x, y) = 0$

Déterminons une équation du plan $\text{Im}(f)$:

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \text{Im}(f) \iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (x, y, z)$$

$$\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = y \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = z \end{cases}$$

$$\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ 3\lambda_2 = x - y \\ 4\lambda_2 = x + z \end{cases}$$

$$\iff \frac{x+z}{4} = \frac{x-y}{3}$$

$$\iff -x + 4y + 3z = 0$$

On obtient ainsi deux descriptions possibles de $\text{Im}(f)$ (l'énoncé n'imposant pas de description particulière, on pouvait se contenter de donner une base de $\text{Im}(f)$)

$$\boxed{v_1 = (1, 1, -1) \text{ et } v_2 = (1, -2, 3) \text{ forment une base de } \text{Im}(f)}$$

$$\boxed{\text{Im}(f) \text{ est le plan d'équation } -x + 4y + 3z = 0}$$

2. Exercice 2 :

(a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \iff f(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3x - 2y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3x - 2y = 0 \\ -3x - 2y = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

Ce dernier système est échelonné et a deux équations principales : on introduit un paramètre x

$$\iff \begin{cases} x = x \\ y = -\frac{3}{2}x \\ z = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

On en déduit que $\text{Ker}(f) = \left\{ (x, -\frac{3}{2}x, \frac{1}{2}x) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$

On a également : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u)$ avec $u = (2, -3, 1)$.

$$\boxed{\text{Le vecteur } u \text{ étant non nul, il forme une base de } \text{Ker}(f)}$$

Les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ engendrent l'espace \mathbb{R}^3 ,

$$\text{donc } \text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right) = \text{Vect}\left(\underbrace{(1, -3, -1)}_{v_1}, \underbrace{(1, -2, 0)}_{v_2}, \underbrace{(1, 0, 2)}_{v_3}\right).$$

Comme $v_1 = \frac{3}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$, on a : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v_2, v_3)$.

$$\boxed{v_2 \text{ et } v_3 \text{ étant non colinéaires, ces deux vecteurs forment une base de } \text{Im}(f)}$$

(b) On remarque que : $u = \frac{3}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$

On en déduit que : $u \in \text{Vect}(v_2, v_3)$, c'est-à-dire : $u \in \text{Im}(f)$.

Un passage au Vect donne : $\text{Vect}(u) \subset \text{Im}(f)$, c'est-à-dire $\boxed{\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)}$

(c) On en déduit que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$ est différent de l'espace nul.

Les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires.

Remarque : $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \text{Im}(f)$

3. **Exercice 3 :**

a) $g \circ f$ est un endomorphisme de E et $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ \underbrace{(f \circ g)}_{=Id_F} \circ f = g \circ f$, donc $g \circ f$ est un projecteur.

b) Par double inclusion.

Soit $x \in \text{Ker}(f) : f(x) = 0$

$g(f(x)) = g(0) = 0$ car g est linéaire.

Donc $x \in \text{Ker}(g \circ f)$.

Soit $x \in \text{Ker}(g \circ f) : g(f(x)) = 0$.

Donc $f(g(f(x))) = f(0) = 0$, ce qui donne $\underbrace{(f \circ g)}_{=Id_F}(f(x)) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = 0$.

Donc $x \in \text{Ker}(f)$.

Ainsi, $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$

c) Soit $y \in \text{Im}(g \circ f) : \text{il existe } x \in E \text{ tel que } g(f(x)) = y$.

Donc $y \in \text{Im}(g)$.

Soit $y \in \text{Im}(g) : \text{il existe } x \in F \text{ tel que } g(x) = y$.

Or $x = \text{Id}_F(x) = f(g(x))$.

D'où $y = (g \circ f)(g(x))$, et ainsi $y \in \text{Im}(g \circ f)$.

Ainsi, $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$

d) Comme $g \circ f$ est un projecteur, on a : $\text{Ker}(g \circ f) \oplus \text{Im}(g \circ f) = E$ (le noyau et l'image d'un projecteur sont des sev supplémentaires).

Ce qui donne : $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) = E$

4. **Exercice 4 :**

• **Déterminons une base de F :**

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Ce dernier système est échelonné et a deux équations principales : on introduit deux paramètres z et t

$$\iff \begin{cases} x = z - 2t \\ y = -2z + t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

On en déduit que $F = \{(z - 2t, -2z + t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(u_3, u_4)$ avec $u_3 = (1, -2, 1, 0)$ et $u_4 = (-2, 1, 0, 1)$

Les deux vecteurs u_3 et u_4 ne sont pas colinéaires, donc forment une base de F .

• **Montrons que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 :**

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{avec les opérations } L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \text{ et } L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

On obtient facilement que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

La famille est libre et a le même nombre d'éléments que la dimension de \mathbb{R}^4 , donc $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .

Par conséquent, $\text{Vect}(u_1, u_2) \oplus \text{Vect}(u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$, donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$

• **Décomposition de $a = (1, 2, 1, 2)$:**

Il existe un unique couple $(b, c) \in F \times G$ tel que $a = b + c$.

$c \in G$: il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1)$.

$b = a - c = (1 - \lambda_1, 2 - \lambda_2, 1 - \lambda_2, 2 - \lambda_1)$

Comme $b \in F$, les composantes de b vérifient les équations caractéristiques de F :

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1) + (2 - \lambda_2) + (1 - \lambda_2) + (2 - \lambda_1) = 0 \\ (1 - \lambda_1) - (1 - \lambda_2) + 2(2 - \lambda_1) = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

Ce qui donne : $\lambda_1 = \frac{7}{4}$ et $\lambda_2 = \frac{5}{4}$

On obtient finalement : $c = \frac{1}{4}(7, 5, 5, 7)$ et $b = \frac{1}{4}(-3, 3, -1, 1)$

5. **Exercice 5 :**

(a) (X, X^2) est une famille libre, donc c'est une base de G : $\dim(G) = 2$

Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in F \iff P(2) = 0$$

$$\iff 4a + 2b + c = 0$$

$$\iff \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = -4a - 2b \end{cases}$$

D'où $F = \{aX^2 + bX - 4a - 2b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(P_1, P_2)$ avec $P_1 = X^2 - 4$ et $P_2 = X - 2$.

P_1 et P_2 étant deux polynômes non nuls de degrés distincts, ils forment une base de F : $\dim(F) = 2$

(b) Soit $P \in F \cap G$.

$P \in G$: il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = aX^2 + bX$

$P \in F$, donc $P(2) = 0$, ce qui donne : $4a + 2b = 0$.

On obtient $b = -2a$, puis $P = a(X^2 - 2X)$.

On en déduit que $P \in \text{Vect}(X^2 - 2X)$ et donc $F \cap G \subset \text{Vect}(X^2 - 2X)$

Il est évident que le polynôme $X^2 - 2X$ appartient à G et à F (il s'annule au point 2).

$X^2 - 2X \in F \cap G$, puis $\text{Vect}(X^2 - 2X) \subset F \cap G$.

Ainsi, $F \cap G = \text{Vect}(X^2 - 2X)$

(c) F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, donc $F + G \subset \mathbb{R}_2[X]$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3$.

$\dim(F + G) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

Par conséquent, $F + G = \mathbb{R}_2[X]$

(d) On pose $Q_1 = -\frac{X}{2} + 1$ et $Q_2 = X^2 + \frac{3X}{2}$.

Alors $Q_1 \in F$ (ce polynôme s'annule en 2), $Q_2 \in G$ et $Q_1 + Q_2 = P$.

Remarque : la somme n'étant pas directe, il n'y a pas unicité de la décomposition.

Voici un autre exemple de décomposition de P :

$$X^2 + X + 1 = \left(-\frac{X}{4} + 1\right) + \left(\frac{5X^2}{4} + X\right)$$

6. **Exercice 6 :**

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in F \iff \begin{cases} x = -y + 2z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

On a donc : $F = \{(-y + 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\left(\underbrace{(-1, 1, 0)}_{v_1}, \underbrace{(2, 0, 1)}_{v_2}\right)$

v_1 et v_2 étant non colinéaires, ces deux vecteurs forment une base de F . Par conséquent, $\dim(F) = 2$.

On pourrait montrer que F et G sont supplémentaires en montrant que la famille (v_1, v_2, u) est une base de \mathbb{R}^3 (cf exercice 4). Pour varier les méthodes, on va étudier ici l'intersection de ces deux sous-espaces (en limitant les calculs).

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de la droite G , par conséquent, $F \cap G$ est soit égal à l'espace nul $\{0\}$, soit égal à G . Comme les composantes du vecteur u ne vérifie pas l'équation du plan F , on en déduit que $u \notin F$. Par conséquent, $F \cap G$ ne peut pas être égal G , et ainsi, $F \cap G = \{0\}$.

De plus, $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

Pour déterminer l'expression analytique de $p(x, y, z)$, on va exploiter les deux informations suivantes :

$$\begin{cases} p(x, y, z) \text{ est un vecteur de } F \\ p(x, y, z) - (x, y, z) \text{ est un vecteur de } G \end{cases}$$

Comme $p(x, y, z) - (x, y, z)$ est un vecteur de G , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $p(x, y, z) - (x, y, z) = \lambda \cdot u = (2\lambda, \lambda, \lambda)$

On obtient ainsi $p(x, y, z) = (x + 2\lambda, y + \lambda, z + \lambda)$

$p(x, y, z)$ appartient à F , donc ses composantes vérifient l'équation de F :

$$(x + 2\lambda) + (y + \lambda) - 2(z + \lambda) = 0$$

Ce qui donne : $\lambda = -x - y + 2z$, puis $p(x, y, z) = (x + 2\lambda, y + \lambda, z + \lambda) = (-x - 2y + 4z, -x + 2z, -x - y + 3z)$

On utilise la relation $p + q = \text{Id}$ pour déterminer q :

$$q(x, y, z) = (x, y, z) - p(x, y, z) = (2x + 2y - 4z, x + y - 2z, x + y - 2z)$$

On utilise la relation $s = p - q$ pour déterminer s :

$$s(x, y, z) = (-3x - 4y - 8z, -2x - y + 4z, -2x - 2y + 5z)$$

Enfin, on a $s' = q - p$, donc $s' = -s$, ce qui donne :

$$s'(x, y, z) = (3x + 4y + 8z, 2x + y - 4z, 2x + 2y - 5z)$$

7. Exercice 7 :

a) $q - p$ est linéaire et $(q - p)^2 = q^2 - q \circ p - p \circ q + p^2 = q - p - p + p = q - p$.

Donc $q - p$ est un projecteur.

b) Soit $x \in \text{Im}(p)$: $p(x) = x$.

$(q - p)(x) = q(x) - p(x) = q(p(x)) - p(x) = 0$ car $q \circ p = p$, ce qui prouve que $x \in \text{Ker}(q - p)$.

Ainsi, $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q - p)$.

Soit $x \in \text{Ker}(q)$: $q(x) = 0$.

$(q - p)(x) = q(x) - p(x) = -p(x) = 0$

Or $p = p \circ q$, d'où $p(x) = p(q(x)) = p(0) = 0$,

Donc $(q - p)(x) = 0$, ce qui prouve que $x \in \text{Ker}(q - p)$.

Ainsi, $\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(q - p)$.

c) $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(q)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\text{Ker}(q - p)$, donc $\text{Im}(p) + \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(q - p)$.

Soit $x \in \text{Ker}(q - p)$: $q(x) - p(x) = 0$.

On pose $u = p(x)$ et $v = x - q(x)$.

Alors $u \in \text{Im}(p)$ et $q(v) = q(x) - q^2(x) = 0$, donc $x \in \text{Ker}(q)$.

Et $u + v = p(x) + x - q(x) = x$ (car $q(x) = p(x)$), donc $x \in \text{Im}(p) + \text{Ker}(q)$.

Ainsi, $\text{Ker}(q - p) \subset \text{Im}(p) + \text{Ker}(q)$.

On a ainsi montré par double inclusion : $\text{Im}(p) + \text{Ker}(q) = \text{Ker}(q - p)$.

Il reste à montrer que la somme est directe :

Soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(q)$ $p(x) = x$ et $q(x) = 0$.

D'où $x = p(x) = p(q(x))$ (car $p = p \circ q$)

Ce qui donne : $x = p(0) = 0$.

Ainsi, $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(q) = \{0\}$.

$$\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(q) = \text{Ker}(q - p)$$

8. Exercice 8 :

Notons $u_k = e_k + e_{k+1}$ (pour $k \leq n - 1$) et $u_n = e_n + e_1$.

• **Supposons n pair :**

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} (e_k + e_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \left((-1)^{k-1} e_k - (-1)^k e_{k+1} \right)$$

On reconnaît une somme télescopique.

D'où $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} u_k = e_1 - (-1)^{n-1} e_n = e_1 + e_n$ car $n-1$ est impair.

Ainsi, $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} u_k$

L'un des vecteurs de la famille \mathcal{F} est combinaison linéaire des autres : **la famille \mathcal{F} est liée.**

Ce n'est donc pas une base de E .

Autre présentation du calcul précédent :

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{n-1} = (e_1 + e_2) - (e_2 + e_3) + (e_3 + e_4) - (e_4 + e_5) + \dots + (e_{n-1} + e_n)$

le dernier terme est compté positivement car il y a un nombre impair de termes

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{n-1} = e_1 + e_n = u_n$

• **Supposons n impair et montrons que la famille \mathcal{F} est libre :**

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$

On a alors : $(\lambda_1 + \lambda_n) e_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) e_3 + \dots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n) e_n = 0$

La famille (e_1, e_2, \dots, e_n) étant libre, on déduit que :

$$\lambda_1 + \lambda_n = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \lambda_k + \lambda_{k+1} = 0$$

Comme $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \lambda_{k+1} = -\lambda_k$, alors $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_k = (-1)^{k+1} \lambda_1$ (progression géométrique de raison -1)

En particulier, $\lambda_n = \lambda_1$ car $n+1$ est pair.

De plus, $\lambda_1 + \lambda_n = 0$, d'où $2\lambda_1 = 0$, puis $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_k = 0$

La famille \mathcal{F} est libre.

De plus, $\text{Card}(\mathcal{F}) = n = \dim(E)$, **la famille \mathcal{F} est une base de E .**

9. Exercice 9 :

• $u + v$ est un automorphisme, donc $\text{rg}(u + v) = n$.

• Soit $y \in \text{Im}(u)$: il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$.

On a : $v(y) = v(u(x)) = 0$ car $v \circ u = 0$.

Donc $y \in \text{Ker}(v)$.

Ainsi, $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$.

On en déduit : $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) \leq \dim(\text{Ker}(v))$.

Or d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(v)) + \text{rg}(v) = \dim(E) = n$.

D'où $\text{rg}(u) \leq n - \text{rg}(v)$, c'est-à-dire $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$.

• Soit $y \in \text{Im}(u + v)$: il existe $x \in E$ tel que $u(x) + v(x) = y$.

$u(x) \in \text{Im}(u)$ et $v(x) \in \text{Im}(v)$, donc $y \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.

On a montré que : $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$

Par conséquent, $\dim(\text{Im}(u + v)) \leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v))$

Et on sait que $\dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) \leq \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v))$ (conséquence de la formule de Grassmann)

D'où $n = \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.

10. Exercice 10 :

Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$ (car $f(x)$ est colinéaire à x , attention le scalaire λ_x dépend du vecteur x). Il reste à démontrer que le coefficient de colinéarité est constant : ie $\forall (x, y) \in E^2 \quad \lambda_x = \lambda_y$.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

On suppose que (x, y) est libre :

On a $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ et $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$.

On obtient : $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0_E$.

Comme la famille (x, y) est libre, on déduit que : $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$.

Par conséquent, $\lambda_x = \lambda_y$.

On suppose que (x, y) est liée :

Alors y est colinéaire à x : il existe $\mu \in \mathbb{K}^*$ tel que $y = \mu x$.

$f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$ et $f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$.

Comme $x \neq 0$, on obtient $\mu \lambda_y = \mu \lambda_x$, puis $\lambda_y = \lambda_x$.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout vecteur x non nul de E , on ait $f(x) = \lambda x$.

La relation s'étend au vecteur nul (car $f(0_E) = 0_E$).

11. **Exercice 11 :**

Stratégies possibles : on dispose de plusieurs méthodes pour démontrer qu'un endomorphisme f est bijectif.

- on prouve par analyse synthèse que l'équation $f_\lambda(x) = y$ d'inconnue x admet une unique solution

- on met en évidence une application g tel que $g \circ f = f \circ g = \text{Id}$.

La mise en oeuvre de la deuxième méthode nécessite de trouver au préalable g .

On peut penser ici à étudier ce que donne la composition $f_\lambda \circ f_\mu$ (ce qui revient à chercher g sous la forme particulière f_μ), puis ajuster la valeur de μ pour avoir $f_\lambda \circ f_\mu = \text{Id}$.

Méthode 1 :

• On suppose $\lambda \neq -1$.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f_\lambda \circ f_\mu &= (\lambda p + \text{Id}) \circ (\mu p + \text{Id}) \\ &= \lambda \mu p^2 + \lambda p + \mu p + \text{Id} \\ &= (\lambda \mu + \lambda + \mu)p + \text{Id} \text{ car } p^2 = p. \end{aligned}$$

On a les équivalences suivantes : $\lambda \mu + \lambda + \mu = 0 \iff \mu(\lambda + 1) = -\lambda$

$$\iff \mu = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

En posant $\mu = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}$ (possible car $\lambda \neq -1$), on a donc $f_\lambda \circ f_\mu = \text{Id}$.

Un calcul similaire établit que $f_\mu \circ f_\lambda = \text{Id}$.

Ce qui prouve que f_λ est un automorphisme et que $f_\lambda^{-1} = f_\mu$ avec $\mu = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}$.

On a seulement prouvé ici une implication, on démontre l'implication réciproque par contraposition.

• On suppose $\lambda = -1$.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(f_{-1}) &\iff -p(x) + x = 0 \\ &\iff p(x) = x \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Ker}(f_{-1}) = \text{Im}(p) \neq \{0\}$ (car p n'est pas l'application nulle).

f_{-1} n'est pas injective, donc n'est pas bijective.

• On a ainsi démontré l'équivalence : $f_\lambda \in \text{GL}(E) \iff \lambda \neq -1$

Méthode 2 :

• On suppose $\lambda \neq -1$, et on montre par analyse synthèse que l'équation $f_\lambda(x) = y$ d'inconnue x admet une unique solution

Analyse : supposons que $f_\lambda(x) = y$.

$$\lambda p(x) + x = y.$$

On applique $p : p(\lambda p(x) + x) = p(y)$ ou encore $(\lambda + 1)p(x) = p(y)$.

Comme $\lambda + 1 \neq 0$, on obtient $p(x) = \frac{1}{\lambda + 1}p(y)$.

$$\text{Puis } x = y - \lambda p(x) = y - \frac{\lambda}{\lambda + 1}p(y).$$

Synthèse : supposons que $x = y - \frac{\lambda}{\lambda + 1}p(y)$.

Alors $x \in E$ et $f_\lambda(x) = \lambda p(x) + x$.

$$\text{Or } p(x) = p(y) - \frac{\lambda}{\lambda + 1}p^2(y) = p(y) - \frac{\lambda}{\lambda + 1}p(y) = \frac{1}{\lambda + 1}p(y).$$

$$\text{D'où } f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\lambda + 1}p(y) + y - \frac{\lambda}{\lambda + 1}p(y) = y$$

Ainsi, f_λ est bijective, et $\forall y \in E \quad f_\lambda^{-1}(y) = y - \frac{\lambda}{\lambda + 1}p(y) = f_\mu(y)$ avec $\mu = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}$.

• cf méthode 1 pour l'implication réciproque.

12. **Exercice 12 :**

(a) $\text{Im}(f)$ est une droite vectorielle de E : **il existe donc** un vecteur x_0 non nul de E tel que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(x_0)$.

Pour tout vecteur x de E , le vecteur $f(x)$ est un élément de $\text{Im}(f) = \text{Vect}(x_0)$: $f(x)$ est colinéaire à x_0 .

Il existe donc un scalaire $u(x)$ **pour lequel** $f(x) = u(x)x_0$.

On a ainsi défini une application u de E vers \mathbb{K} .

Il reste à prouver que u est une forme linéaire non nulle sur E .

Soit pour cela $(x, x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

D'une part, $f(\lambda x + x') = u(\lambda x + x')x_0$.

D'autre part, $f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x')$ linéarité de f
 $= \lambda u(x)x_0 + u(x')x_0$.

On en déduit que : $(u(\lambda x + x') - \lambda u(x) - u(x'))x_0 = 0$.

Comme x_0 est non nul, alors $u(\lambda x + x') - \lambda u(x) - u(x') = 0$ et donc $u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x')$.

u est une forme linéaire sur E .

(b) Soit $x \in E$.

$f^2(x) = f(f(x)) = f(u(x)x_0) = u(x)f(x_0)$. on rappelle que $u(x)$ est un scalaire

Or $f(x_0) = u(x_0)x_0$.

D'où $f^2(x) = u(x_0)u(x)x_0 = u(x_0)f(x)$.

En posant $\lambda = u(x_0)$, on a : $\forall x \in E, f^2(x) = \lambda f(x)$, c'est-à-dire $f^2 = \lambda f$

(c) Soit $\alpha \in \mathbb{K}^* \setminus \{\lambda\}$.

Soit $\beta \in \mathbb{K}$.

$(f - \alpha \text{Id}) \circ (f - \beta \text{Id}) = f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta \text{Id}$
 $= (\lambda - \alpha - \beta)f + \alpha\beta \text{Id}$

En choisissant $\beta = \lambda - \alpha$, alors on a $\beta \neq 0$ et $(f - \alpha \text{Id}) \circ (f - \beta \text{Id}) = \alpha\beta \text{Id}$.

On pose alors $g = \frac{1}{\alpha\beta}(f - \beta \text{Id})$.

D'après ce qui précède, on a : $(f - \alpha \text{Id}) \circ g = \text{Id}$.

On vérifie également que $g \circ (f - \alpha \text{Id}) = \text{Id}$.

On en déduit que $(f - \alpha \text{Id})$ est un automorphisme et $(f - \alpha \text{Id})^{-1} = \frac{1}{\alpha\beta}(f - \beta \text{Id})$ avec $\beta = \lambda - \alpha$,

c'est-à-dire : $(f - \alpha \text{Id})^{-1} = \frac{1}{\alpha(\lambda - \alpha)}(f + (\alpha - \lambda)\text{Id})$

13. Exercice 13 :

Problématique : comment définir g et p ?

On ne va pas définir g et p en précisant le résultat de $g(x)$ et de $p(x)$ pour $x \in E$, mais en indiquant les images des éléments d'une base pour ces deux applications.

On s'appuie en effet sur le théorème suivant :

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , et si $\mathcal{F} = (y_1, \dots, y_n)$ est une famille de n vecteurs de E , alors il existe un unique endomorphisme g tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad g(e_i) = y_i$.

On a de plus les équivalences suivante :

g est injective $\iff \mathcal{F}$ est libre
 g est surjective $\iff \mathcal{F}$ est génératrice de E
 g est bijective $\iff \mathcal{F}$ est une base de E

Solution :

On note $r = \dim(\text{Ker}(f))$.

Soit (e_1, \dots, e_r) une base de $\text{Ker}(f)$.

Alors (e_1, \dots, e_r) est une famille libre de E , on la complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E .

On a $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_r), f(e_{r+1}), \dots, f(e_n)) = \text{Vect}(f(e_{r+1}), \dots, f(e_n))$ car $f(e_1) = \dots = f(e_r) = 0$.

Ainsi, $(f(e_{r+1}), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ à $n - r$ éléments.

Or d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = n - r$.

Par conséquent, $(f(e_{r+1}), \dots, f(e_n))$ est une base de $\text{Im}(f)$, donc en particulier est libre.

On la complète en une base $\mathcal{B}' = (y_1, \dots, y_r, f(e_{r+1}), \dots, f(e_n))$ de E .

Il existe un endomorphisme p de E tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad p(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq r \\ e_i & \text{sinon} \end{cases}$

Il existe un endomorphisme g de E tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad g(e_i) = \begin{cases} y_i & \text{si } i \leq r \\ f(e_i) & \text{sinon} \end{cases}$

Il reste à prouver que g et p conviennent.

• p est un projecteur :

Si $i \leq r$, on a $p^2(e_i) = p(p(e_i)) = p(0) = 0 = p(e_i)$.

Et si $i > r$, alors $p^2(e_i) = p(p(e_i)) = p(e_i)$.

Les endomorphismes p^2 et p prennent les mêmes valeurs sur la base \mathcal{B} , donc sont égaux : p est donc un projecteur.

• g est un automorphisme :

Comme g transforme la base \mathcal{B} en la base \mathcal{B}' de E , g est un automorphisme.

• $f = g \circ p$:

Si $i \leq r$, on a : $(g \circ p)(e_i) = g(p(e_i)) = g(0) = 0$ et $f(e_i) = 0$.

Et si $i > r$, on a : $(g \circ p)(e_i) = g(p(e_i)) = g(e_i) = f(e_i)$.

Ainsi, les endomorphismes $g \circ p$ et f prennent les mêmes valeurs sur la base \mathcal{B} , donc sont égaux.

Complément : étude d'un exemple :

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 défini par $f(x, y, z) = (y, x + z, y)$.

Il est aisé de prouver que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1)$ avec $e_1 = (1, 0, -1)$.

On note $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$: la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une famille libre à 3 éléments de \mathbb{R}^3 , donc forme une base de \mathbb{R}^3 .

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

On complète cette famille libre $((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ en une base $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0))$ de \mathbb{R}^3 .

On définit l'endomorphisme p par $p(e_1) = 0$, $p(e_2) = e_2$ et $p(e_3) = e_3$.

On utilise la relation linéaire $(x, y, z) = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + (z + x) \cdot e_3$ pour obtenir l'expression analytique de p :

$$p(x, y, z) = x \cdot p(e_1) + y \cdot p(e_2) + (z + x) \cdot p(e_3) = y \cdot e_2 + (z + x) \cdot e_3 = (0, y, x + z)$$

On définit l'endomorphisme g par $g(e_1) = (1, 0, 0)$, $g(e_2) = (1, 0, 1)$ et $g(e_3) = (0, 1, 0)$.

L'expression analytique de g est alors :

$$g(x, y, z) = x \cdot g(e_1) + y \cdot g(e_2) + (z + x) \cdot g(e_3) = (x, 0, 0) + (y, 0, y) + (0, x + z, 0) = (x + y, x + z, y)$$

Il est facile de vérifier que $p^2 = p$ et que g est bijectif.

Et : $g(p(x, y, z)) = g(0, y, x + z) = (y, x + z, y) = f(x, y, z)$.
