Programme de colle pour la semaine du 15 avril

mathématiques MPSI : semaine 25

---

1. **Continuité uniforme**. Théorème de Heine.
2. **Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment**.
   Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.
3. **Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment**.
   Linéarité, positivité, croissance de l'intégrale. Relation de Chasles.
   Inégalité triangulaire : $|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f|$
   Brève extension des résultats aux fonctions à valeurs complexes.
   Sommes de Riemann : si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Démonstration dans le cas où f est M-lipschitzienne.
4. **Intégrale d'une fonction continue sur un segment**.
   Théorème fondamental du calcul intégral. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. Intégration par parties, changement de variables.
   Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$.
   Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, positive et si $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors f est identiquement nulle.
5. Pour une fonction f de classe C^{n+1}, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.
   Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction f de classe C^{n+1}.

QUESTIONS DE COURS

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction M-lipschitzienne. On pose $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ avec $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Démontrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

2. Démonstration du résultat suivant :

si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, positive et si $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle.

3. Énoncé et démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.

Présentation de la question de cours 1 :

• $$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - S_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Big(f(t)-f(x_k)\Big)\mathrm{d}t\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Big(f(t)-f(x_k)\Big)\mathrm{d}t\right|$$

Or $\displaystyle\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Big(f(t)-f(x_k)\Big)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \Big|f(t)-f(x_k)\Big|\mathrm{d}t \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} M|t-x_k|\mathrm{d}t$.

Et $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} M|t-x_k|\mathrm{d}t = M\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-x_k)\mathrm{d}t = M\left[\frac{(t-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = M\frac{h^2}{2}$ avec $h = x_{k+1}-x_k = \dfrac{b-a}{n}$

(pas de la subdivision)

• Ainsi, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - S_n\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M\frac{h^2}{2} = M\times n\times\frac{h^2}{2} = \frac{M(b-a)^2}{2n}$ et $\dfrac{M(b-a)^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$