CORRECTION DE L'EXERCICE 25 DU TD 23 : IRRATIONALITÉ DE π (*niveau 4*)

1. $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$.

   • P_n est une fonction polynomiale de degré $2n$, donc pour tout entier $k > 2n$, $P_n^{(k)}$ est la fonction nulle.
   Pour $k > 2n$, $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.

   • 0 et $\frac{a}{b}$ sont des racines de multiplicité n du polynôme P_n.
   Donc, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.

   • D'après la formule de Taylor, le coefficient c_k de degré k du polynôme P_n vérifie : $c_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$
   Utilisons la formule du binôme pour déterminer les coefficients du polynôme P_n :
   $P_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k x^k(-1)^{n-k}a^{n-k} = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}\binom{n}{k-n}b^{k-n}x^k(-1)^{2n-k}a^{2n-k}$ (*après changement d'indices*)
   On en déduit que, pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$, $c_k = \dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{k-n}b^{k-n}(-1)^{2n-k}a^{2n-k}$
   D'où $P^{(k)}(0) = k!\,c_k = \dfrac{k!}{n!}\dbinom{n}{k-n}b^{k-n}(-1)^{2n-k}a^{2n-k}$
   Comme $k \geq n$, $\dfrac{k!}{n!}$ est un entier naturel. a et b étant des entiers naturels, on a donc : $P^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

   • On a : $P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = \dfrac{1}{n!}\left(\frac{a}{b} - x\right)^n(-bx)^n = \dfrac{1}{n!}(bx-a)^n x^n = P_n(x)$
   En dérivant k fois cette relation, on a : $(-1)^k P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n^{(k)}(x)$.
   En évaluant en 0, on obtient : $(-1)^k P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = P_n^{(k)}(0)$, et donc $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$.

   $\boxed{\text{On a ainsi montré que } \forall k \in \mathbb{N} \quad P^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \text{ et } P_n^{(k)}\left(\tfrac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}}$

2. $\left|\displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi \left|P_n(t)\sin(t)\right|\mathrm{d}t$
   Or $\forall t \in [0, \pi] \quad \left|P_n(t)\sin(t)\right| = \dfrac{1}{n!}t^n|bt-a|^n\sin(t)$
   La fonction $t \mapsto |bt-a|$ est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc admet un maximum M.
   On obtient alors : $\forall t \in [0, \pi] \quad \left|P_n(t)\sin(t)\right| \leq \dfrac{1}{n!}\pi^n M^n$
   Donc $\displaystyle\int_0^\pi \left|P_n(t)\sin(t)\right|\mathrm{d}t \leq \int_0^\pi \frac{1}{n!}\pi^n M^n\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\pi^{n+1}M^n$
   Comme $(\pi M)^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n!)$, alors $\dfrac{\pi(\pi M)^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   $\boxed{\text{On en déduit que } I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

3. Effectuons une première intégration par parties :
   $I_n = \Big[-P_n(t)\cos(t)\Big]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t = P_n(\pi) + P_n(0) + \int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t$
   Effectuons une nouvelle intégration par parties :
   $\displaystyle\int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \Big[P_n'(t)\sin(t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)\mathrm{d}t = -\int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)\mathrm{d}t$
   En combinant les deux résultats, on obtient : $\displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)\mathrm{d}t = P_n(\pi) + P_n(0)$

   Avec un calcul similaire, on montre le résultat plus général :
   $\displaystyle\int_0^\pi P_n^{(2k)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi P_n^{(2k+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t = P_n^{(2k)}(\pi) + P_n^{(2k)}(0)$
   On peut alors faire la somme alternée de ces résultats :
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\int_0^\pi P_n^{(2k)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi P_n^{(2k+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t\right] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[P_n^{(2k)}(\pi) + P_n^{(2k)}(0)\right]$
   La somme de gauche est une somme télescopique :
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\int_0^\pi P_n^{(2k)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi P_n^{(2k+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t\right] = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t + (-1)^n\int_0^\pi P_n^{(2n+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t$

$$= I_n \qquad \textit{car la dérivée d'ordre } 2n+2 \textit{ de } P_n \textit{ est la fonction nulle}$$

On rappelle que par hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$.

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[P_n^{(2k)}\left(\frac{a}{b}\right) + P_n^{(2k)}(0) \right]$$

D'après la question 1, $P_n^{(2k)}(\frac{a}{b})$ et $P_n^{(2k)}(0)$ sont des entiers relatifs. $\boxed{\text{Par conséquent, } I_n \in \mathbb{Z}}$

$I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc à partir d'un certain rang N, $|I_n| \le \dfrac{1}{2}$.
De plus, $I_n \in \mathbb{Z}$.
On en déduit que $\forall n \ge N,\ I_n = 0 \qquad \textit{car } \mathbb{Z} \cap \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] = \left\{0\right\}$
Or, $\forall t \in [0,\pi]$, $\dfrac{t^n}{n!} \ge 0$ et $bt - a \le b\pi - a = 0$.
Par conséquent, la fonction $t \mapsto P_n(t)\sin(t)$ est **continue**, **de signe constant** et **non nulle**.
Donc $I_n \neq 0$. **Contradiction**

$\boxed{\pi \text{ est irrationnel}}$

Commentaires : *cette preuve de l'irrationnalité de π est due à Ivan Niven (publiée en 1947). Il existe bien d'autres preuves de l'irrationnalité de π : Lambert est le premier à avoir démontré ce résultat dans les années 1760.*

CORRECTION DE L'EXERCICE 41 DU TD 23 : INTÉGRALE DE POISSON (*niveau 3*)

1. On constate que $1 - 2x\cos(\theta) + x^2 = (x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$ est toujours positif et est nul si et seulement si $\sin\theta = 0$ et $x - \cos\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = k\pi$ et $x = \cos k\pi = (-1)^k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).
   Lorsque $|x| \neq 1$, il en résulte que la fonction $\theta \mapsto \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$ est définie et continue sur $[0,\pi]$, **ce qui justifie que $I(x)$ est bien définie.**

2. $I(-x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 + 2x\cos(\theta) + x^2)\mathrm{d}\theta$.
   Effectuons le changement de variables $\varphi = \pi - \theta$:
   $$I(-x) = \int_{\pi}^{0} \ln(1 + 2x\cos(\pi - \varphi) + x^2) \times (-\mathrm{d}\varphi) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(\varphi) + x^2)\mathrm{d}\varphi = I(x)$$
   $\boxed{\text{La fonction } I \text{ est paire}}$

3. Les racines de $X^{2n} - 1$ sont les racines $2n$-ièmes de l'unité :
   $$1,\ -1,\ e^{ki\pi/n},\ e^{-ki\pi/n} \text{ (avec } 1 \le k \le n-1)$$
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^{2n} - 1 = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left[(x - e^{ki\pi/n})(x - e^{-ki\pi/n})\right] = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
   Notons : $S_n = \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2\right)$ et $R_n = \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2\right)$

   • S_n est une somme de Riemann associée à la fonction $\theta \mapsto \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$ sur $[0,\pi]$,
   Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(x)$.

   • D'autre part, $S_n = \dfrac{\pi}{n}\ln(1 - 2x + x^2) + R_n = \ln(1 - 2x + x^2) + \dfrac{\pi}{n}\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)\right)$

   En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient : $S_n = \dfrac{\pi}{n}\left[\ln((1-x)^2) + \ln\left(\dfrac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}\right)\right]$

   Si $x \in]-1, 1[$, alors $x^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln\left(\dfrac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\dfrac{1}{1 - x^2}\right)$.
   On en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   L'unicité de la limite permet de déduire que $I(x) = 0$.

   Si $x > 1$, alors $S_n = \dfrac{\pi}{n}\left[\ln((1-x)^2) + \ln(x^{2n}) + \ln\left(\dfrac{1 - \frac{1}{x^{2n}}}{x^2 - 1}\right)\right] = 2\pi\ln(x) + \dfrac{\pi}{n}\left[\ln((1-x)^2) + \ln\left(\dfrac{1 - \frac{1}{x^{2n}}}{x^2 - 1}\right)\right]$
   On en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\pi\ln(x)$.
   L'unicité de la limite permet de déduire que $I(x) = 2\pi\ln(x)$.

Si $x < -1$, alors par parité, on obtient que $I(x) = I(-x) = 2\pi \ln(-x)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } I(x) = 2\pi \ln(|x|) \text{ si } |x| > 1 \text{ et } I(x) = 0 \text{ si } |x| < 1}$

CORRECTION D' EXERCICES SUR L'UNIFORME CONTINUITÉ (*niveau 4*)

Exercice 2a :

Supposons par l'absurde que f soit uniformément continue.

Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$.

Pour tout entier n supérieur à $\dfrac{1}{\alpha^2}$, on a : $(2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}) - 2n\pi \leq \alpha$,

donc $\left| f(2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}) - f(2n\pi) \right| \leq 1$, ce qui donne $(2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \leq 1$.

Or $(2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}\pi$, donc $(2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ce qui est **contradictoire** avec la suite de terme général $(2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est majorée.

Exercice 2b :

Supposons par l'absurde que f soit uniformément continue.

Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in]0,1]^2$, $|x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$.

Posons $x_n = \frac{1}{n^2}$ et $y_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$.

A partir d'un certain rang, $|x_n - y_n| \leq \alpha$, donc $|f(x_n) - f(y_n)| \leq 1$,

ce qui donne $\dfrac{n^3}{n+1} \leq 1$: **contradiction**.

Exercice 2c :

f est dérivable, et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| = \dfrac{1}{(1+x)^2} \leq 1$.

f est 1-lipschitzienne, donc est uniformément continue.

Exercice 2d :

Raisonnement par l'absurde : même méthode qu'au a, considérer les points n^2 et $n^2 + \frac{1}{n}$ par exemple.

Exercice 4 :

Soit $\varepsilon > 0$.

$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$, donc il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [A, +\infty[$, $|f(x) - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$.

f est continue sur le segment $[0, A]$, donc d'après le théorème de Heine, est uniformément continue sur $[0, A]$: il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0,A]^2$, $|x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^+$ tel que $|x-y| \leq \alpha$ (on peut supposer de plus que $x \leq y$) .

<u>Cas 1 :</u> Si $x \in [0,A]$ et $y \in [0,A]$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.

<u>Cas 2 :</u> Si $x \in [A, +\infty[$ et $y \in [A, +\infty[$, alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon$.

<u>Cas 3 :</u> Si $x \in [0,A]$ et $y \in [A, +\infty[$, alors $|f(x) - f(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f(A) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (cf cas 2)

Par conséquent, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Exercice 6 :

f est uniformément continue, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Notons $n = \lfloor x/\alpha \rfloor$. On a donc $n \leq \frac{x}{\alpha} \leq n+1$ ou encore $n\alpha \leq x \leq (n+1)\alpha$.

On a : $f(x) - f(0) = f(x) - f(n\alpha) + f(n\alpha) - f((n-1)\alpha) + ... + f(\alpha) - f(0)$.

Donc : $|f(x) - f(0)| \leq |f(x) - f(n\alpha)| + |f(n\alpha) - f((n-1)\alpha)| + ... + |f(\alpha) - f(0)| \leq (n+1)$.

Par conséquent, $|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq (n+1) + |f(0)| \leq \frac{x}{\alpha} + 1 + |f(0)|$.

Il suffit de poser $a = \frac{1}{\alpha}$ et $b = |f(0)|$.

Il reste à étudier le cas où $x < 0$ ....

---

1. • Supposons que f soit positive, alors $f = |f|$, par conséquent $\int_a^b f = \int_a^b |f|$.
   Comme $\int_a^b f \geq 0$ (positivité de l'intégrale), on a $|\int_a^b f| = \int_a^b f$.

   • Supposons que f soit négative, alors $f = -|f|$, par conséquent $\int_a^b f = -\int_a^b |f|$.
   Comme $\int_a^b f \leq 0$, on a $|\int_a^b f| = -\int_a^b f$.

   • Supposons que $|\int_a^b f| = \int_a^b |f|$.
   Si $\int_a^b f \geq 0$, alors on a $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ ou encore $\int_a^b (|f| - f) = 0$.
   $|f| - f$ est une fonction positive, continue, d'intégrale nulle, donc $|f| - f = 0$ et f est ainsi positive.

   Si $\int_a^b f \leq 0$, alors on a $-\int_a^b f = \int_a^b |f|$ ou encore $\int_a^b (|f| + f) = 0$.
   $|f| + f$ est une fonction positive, continue, d'intégrale nulle, donc $|f| + f = 0$ et f est ainsi négative.

2. • Supposons qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta}|f|$.
   Alors $\int_a^b f = e^{i\theta} \int_a^b |f|$, et donc $|\int_a^b f| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1} \times |\int_a^b |f|| = \int_a^b |f|$ car $\int_a^b |f| \geq 0$.

   • Supposons que $|\int_a^b f| = \int_a^b |f|$ (*partie plus difficile*)
   On peut écrire : $\int_a^b f = re^{i\theta}$ avec $r = |\int_a^b f|$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

   Considérons alors $g : t \mapsto f(t)e^{-i\theta}$.
   On a $\int_a^b g = |\int_a^b f| \in \mathbb{R}$, donc $\int_a^b g = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$.
   Or $|g| = |f|$, l'hypothèse de départ donne alors $\int_a^b |g| = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$, puis $\int_a^b (|g| - \mathrm{Re}(g)) = 0$.
   La fonction $|g| - \mathrm{Re}(g)$ est continue, positive, d'intégrale nulle, donc $|g| - \mathrm{Re}(g) = 0$.
   On en déduit que $\mathrm{Im}(g) = 0$, et que $g = \mathrm{Re}(g) = |g| = |f|$.
   Ainsi, $fe^{-i\theta} = |f|$.