Programme de colle pour la semaine du 19 mai

mathématiques MPSI : semaine 28

---

1. **Matrices : révision**
   - Matrice d'une application linéaire dans des bases
   - Application linéaire canoniquement associée à une matrice
2. **Matrices équivalentes et rang**
   Deux matrices A et B de de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
   Invariance du rang par transposition.
   Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.
   Les opérations élémentaires conservent le rang. Application au calcul du rang : algorithme du pivot.
3. **Matrices semblables et trace**
   Linéarité de la trace. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
   Trace d'un endomorphisme. Trace d'un projecteur.
4. **Groupe symétrique :**
   Groupe des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Ordre d'une permutation.
   Cycle, transposition.
   Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité.
   Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.
   Signature d'une permutation.
5. **Application n-linéaire**. Symétrie, antisymétrie.
   Forme n-linéaire alternée. Effet d'une permutation.
6. **Déterminant de n vecteurs**
   Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n.
   Formule développée du déterminant dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$ (règle de Sarrus).
   Formule de changement de bases.
   Caractérisation des bases.
7. **Déterminant d'une matrice carrée**
   Déterminant d'une matrice carrée, d'un produit.
   Déterminant d'une transposée.
   Caractérisation des matrices inversibles.
8. **Calculs des déterminants**
   Effets des opérations élémentaires sur le déterminant.
   Mineurs, cofacteurs. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.
   Déterminant d'une matrice triangulaire (*à partir du mardi 20 mai*)

Questions de cours :

— Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

— Soit σ une permutation de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}$.

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille de n vecteurs de E.
Montrer l'équivalence : $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$
