1. **Présentation des copies :**

• Laisser une marge à gauche d'au moins 4 cm.

• Numéroter les feuilles des copies rendues.

• Ne pas réécrire le sujet sur la copie.

• Limiter l'usage du blanco ou d'autre correcteur.

• **Mettre en évidence les résultats définitifs.**

2. **Conduite d'une démonstration :**

• **Ne pas partir du résultat à prouver.**

L'objectif d'une démonstration est de parvenir au résultat souhaité (par des inférences déductives).

• **Articuler les raisonnements** : on ne doit pas remplacer les articulations logiques "donc", "alors", "par conséquent" par le symbole $\Longrightarrow$ ou le symbole $\Longleftrightarrow$.

• **Maîtriser l'usage du symbole $\Longleftrightarrow$.**

On utilise le symbole $\Longleftrightarrow$ pour

- la résolution d'équations ou d'inéquations par équivalences

- la preuve que deux propositions sont équivalentes

- la recherche de conditions pour qu'une proposition soit vraie

• **Introduire correctement le cadre d'étude** : déclaration des variables utilisées et des hypothèses de départ.

• **Proposer une réponse structurée** : une preuve mathématique ne peut pas être qu'une succession de calculs.

3. **Raisonnement par récurrence :**

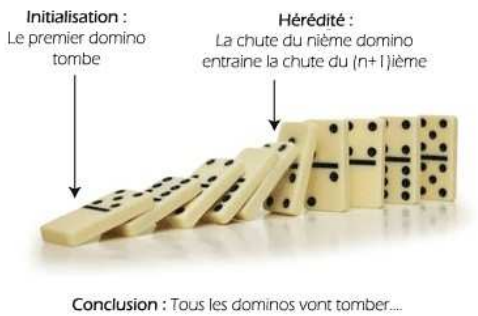
La première question de l'exercice 1 demandait de prouver la proposition : « $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».
Certains élèves confondent la proposition Q : « $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ »
et la proposition $P(n)$: « $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».
Cela n'a pas de sens de définir $P(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».
La proposition de récurrence $P(n)$ concerne le résultat au rang n.

• Énoncer correctement la proposition $P(n)$

• Lorsqu'on démontrer le caractère héréditaire de la proposition, on doit formuler correctement l'hypothèse de départ, à savoir :

on suppose $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$.

soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.



• ne pas encadrer le résultat intermédiaire "$P(n+1)$ est vraie", mais le résultat définitif $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(n)}$

Exercice 1 : calcul d'une somme (5.5 points)

1. Soit $P(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».

   $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{2^2}{4}$, donc $P(1)$ est vraie.

   Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$.

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3\\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \text{ d'après } P(n)\\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   $\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence, } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \textbf{1.5 pt}}$

2. (a) Méthode 1 : par récurrence sur n :

   Soit $\mathcal{P}_n$: « $T_n = \binom{n+2}{4}$ ».

   Comme $T_1 = \binom{2}{3} = 0$ et $\binom{3}{4} = 0$, la proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

   $$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{k+1}{3}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{3} + \binom{n+2}{3}\\ &= \binom{n+2}{4} + \binom{n+2}{3} \qquad \text{d'après } P(n)\\ &= \binom{n+3}{4} \qquad \text{d'après la relation de Pascal}\end{aligned}$$

   $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   $\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence, } \forall n \in \mathbb{N}^* \ T_n = \binom{n+2}{4}}$ **1.25 pt**

   Méthode 2 : en faisant apparaître une somme télescopique :

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   D'après la relation de Pascal : $\binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{4} = \binom{k+2}{4}$. On en déduit :

   $$T_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{k+2}{4} - \binom{k+1}{4}\right] = \binom{n+2}{4} - \binom{2}{4} \qquad \text{(somme télescopique)}$$

   Comme $\binom{2}{4} = 0$, on obtient alors $\boxed{T_n = \binom{n+2}{4}}$

   (b) $\binom{k+1}{3} = \dfrac{(k+1)k(k-1)}{3!} = \dfrac{1}{6}(k^3-k)$.

   $\boxed{\text{D'où } T_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(k^3-k) = \frac{1}{6}\left(S_n - \sum_{k=1}^{n} k\right)}$ **1 pt**

(c) Pour $n \geq 2$, on a : $T_n = \binom{n+2}{4} = \dfrac{(n+2)!}{4!(n-2)!} = \dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24}$

Pour $n = 1$, $T_1 = 0$ et $\dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24} = 0$.

Par conséquent, pour $n \geq 1$, $T_n = \dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24}$

Et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
\text{D'où}\ \ S_n &= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)\Big[(n+2)(n-1)+2\Big]}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(n^2+n)}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \textbf{1.75 pt}
\end{aligned}$$

On retrouve le résultat établi à la question 1.

Exercice 2 : calculs algébriques (3.75 points)

1. Soit $P(n)$: « $u_n = n^2$ »

   $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

   Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un entier $n \geq 0$.

   $$\begin{aligned}
   \text{On a : } u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n + 2 \\
   &= 2(n+1)^2 - n^2 + 2 \qquad \text{d'après } P(n) \text{ et } P(n+1) \\
   &= n^2 + 4n + 4 \\
   &= (n+2)^2
   \end{aligned}$$

   $P(n+2)$ est vraie.

   $\boxed{\text{On a ainsi montré, par une récurrence de pas double, que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2}$ **1.25 pt**

2. Comme $1 + \dfrac{k+1}{n-k} = \dfrac{n+1}{n-k}$, on obtient :

   $$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n+1}{n-k} = \frac{n+1}{n} \times \frac{n+1}{n-1} \times \cdots \times \frac{n+1}{1} \qquad \textit{ce produit comprend } n \textit{ facteurs}$$

   $\boxed{\text{Ainsi, } P_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}}$ **1 pt**

3. $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{n} \binom{j}{i} 4^i \Big)$

   Or $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{j}{i} 4^i = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 4^i + \sum_{i=j+1}^{n} \binom{j}{i} 4^i$

   Comme les coefficients binomiaux de la deuxième somme sont tous nuls, on a alors :

   $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{j}{i} 4^i = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 4^i = 5^j$ d'après la formule du binôme

   $\boxed{\text{Ainsi, } S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} 5^j = \frac{5^{n+1}-1}{4}}$ **1.5 pt**

Exercice 3 : nombres de Catalan (9 points)

1. $\boxed{c_0 = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 2 \text{ et } c_3 = 5}$ **0.5 pt**

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Attention, le calcul qui suit n'est pas valable pour $n = 0$: ce cas sera traité séparément.*

   $$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n! \times n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)! \times (n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n! \times n!} \times \frac{n+1}{n+1} - \frac{(2n)!}{(n+1) \times n! \times (n-1)!} \times \frac{n}{n}$$
$$= \frac{(2n)! \times \Big(n+1-n\Big)}{n! \times n! \times (n+1)}$$
$$= \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$$
$$= c_n \qquad \textbf{1.25 pt}$$

Pour $n = 0$, $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{0}{0} - \binom{0}{1} = 1 = c_0$. **0.5 pt**

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}}$$

Comme les coefficients binomiaux sont des entiers naturels, l'expression précédente permet de déduire que $c_n \in \mathbb{Z}$. D'après la définition de c_n, on a également : $c_n \geq 0$.
Par conséquent, **les nombres de Catalan sont des entiers naturels. 0.5 pt**

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$c_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2}$ et $c_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+2) \times ((n+1)!)^2}$
D'où $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \left(\dfrac{n!}{(n+1)!}\right)^2 \times \dfrac{n+1}{n+2}$
On utilise alors les simplifications suivantes :
$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \text{ et } \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2)(2n+1) = 2(n+1)(2n+1).$$
On en déduit : $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2}$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}\, c_n} \qquad \textbf{1.25 pt}$$

4. (a) $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, c_k\, c_{n-k}$
$= \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (n-i)\, c_{n-i}\, c_i$ (en effectuant le changement d'indice suggéré par l'énoncé)
$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, c_k\, c_{n-k}$ (l'indice i est remplacé par k)
$= n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k\, c_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k\, c_k\, c_{n-k}$
$= nS_n - T_n$,
D'où $2T_n = nS_n$, et ainsi, $\boxed{T_n = \dfrac{n}{2} S_n}$ **1 pt**

(b) $T_{n+1} + S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\, c_k\, c_{n+1-k}$
$= c_0 c_{n+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)\, c_k\, c_{n+1-k}$
$= c_{n+1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+2)\, c_{k+1}\, c_{n-k}$
$= c_{n+1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (4k+2)\, c_k\, c_{n-k}$ (en utilisant la relation de récurrence de la question 3)
$= c_{n+1} + 4\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, c_k\, c_{n-k} + 2\sum_{k=0}^{n} c_k\, c_{n-k}$
$= c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$ **2 pts**

(c) D'après la question 4a, $T_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}S_{n+1}$, d'où $T_{n+1} + S_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}S_{n+1} + S_{n+1} = \dfrac{n+3}{2}S_{n+1}$.

D'autre part, d'après la question 4b, $T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$

Comme d'après la question 4a, $4T_n = 2nS_n$, on obtient $T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + (2n+2)S_n$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \frac{n+3}{2}S_{n+1} = c_{n+1} + 2(n+1)S_n}$$ **0.75 pt**

(d) Soit $P(n)$: « $S_n = c_{n+1}$ » .
$P(0)$ est vraie.
Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$.
D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\frac{n+3}{2}S_{n+1} &= c_{n+1} + 2(n+1)S_n \\ &= c_{n+1} + 2(n+1)c_{n+1} \qquad \text{d'après } P(n) \\ &= (2n+3)c_{n+1}\end{aligned}$$

D'où $S_{n+1} = \dfrac{2(2n+3)}{n+3}c_{n+1} = c_{n+2}$ (d'après la question 3)

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout entier } n,\ S_n = c_{n+1}}$$ **1.25 pt**

EXERCICE 4 : TRIGONOMÉTRIE (8.5 POINTS)

Partie A :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) - \sin(2x) &= \cos(2x + x) - 2\sin(x)\cos(x) \\ &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) \\ &= \Big(1 - 2\sin^2(x)\Big)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) \\ &= \cos(x)\Big(1 - 2\sin^2(x) - 2\sin^2(x) - 2\sin(x)\Big)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient ainsi que } \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(3x) - \sin(2x) = \cos(x)\Big(-4\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1\Big)}$$ **1.5 pt**

2. Supposons $x = \dfrac{\pi}{10}$.

Alors $3x + 2x = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad 3x = \dfrac{3\pi}{10}$ *et* $2x = \dfrac{2\pi}{10}$ *sont complémentaires*

D'où $\cos(3x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin(2x)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } x = \frac{\pi}{10}, \text{ alors } \cos(3x) = \sin(2x)}$$ **0.75 pt**

3. En évaluant la relation établie à la question 1 en $\dfrac{\pi}{10}$, on obtient alors :

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\left[-4\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + 1\right] = 0$$

Comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) \neq 0$, on déduit : $\boxed{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right) + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right) - 1 = 0}$ **0.75 pt**

4. $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ est donc solution de l'équation du second degré $4x^2 + 4x - 1 = 0$.

Le discriminant de cette équation vaut : $\Delta = 20$.

Cette équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

Or $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right) \geq 0$ et seule la solution x_1 est positive.

$$\boxed{\text{Par conséquent, } \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$ **1 pt**

Appliquée avec $a = \dfrac{\pi}{10}$, la relation $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(a)$ donne :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) &= 1 - 2\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\Big)^2 \\ &= 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{D'où : } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}}$ **0.75 pt**

Partie B :

1. On utilise la relation $\sin(a)\cos(a) = \dfrac{1}{2}\sin(2a)$ dans le calcul qui suit :

$$\begin{aligned}P \times \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\ &= \frac{1}{8}\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } P \times \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}$ **0.75 pt**

On obtient alors : $P = \dfrac{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \dfrac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \dfrac{-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}$

$\boxed{\text{Par conséquent, } P = -\frac{1}{8}}$ **0.75 pt**

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

En utilisant la relation $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ avec $p = 4x$ et $q = 2x$, on obtient :

$\cos(2x) + \cos(4x) = 2\cos(3x)\cos(x)$

Et $\cos(6x) = 2\cos^2(3x) - 1$.

D'où $\cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) = 2\cos(3x)\Big(\cos(3x) + \cos(x)\Big) - 1$

En utilisant de nouveau la formule de transformation d'une somme en produit, on déduit :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) = 4\cos(x)\cos(2x)\cos(3x) - 1}$ **1.5 pt**

Méthode 2 : autre approche

On utilise la relation : $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big)$

$$\begin{aligned}4\cos(x)\cos(2x)\cos(3x) &= 2\cos(x)\Big(\cos(5x) + \cos(x)\Big) \\ &= 2\cos(x)\cos(5x) + 2\cos^2(x) \\ &= \cos(6x) + \cos(4x) + \cos(2x) + 1\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) = 4\cos(x)\cos(2x)\cos(3x) - 1}$

3. En utilisant le résultat précédent avec $x = \dfrac{\pi}{7}$, on obtient : $S = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{7}\right) - 1$

Or $\cos\left(\dfrac{3\pi}{7}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{4\pi}{7}\right) = -\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)$ $\quad$ *$\dfrac{3\pi}{7}$ et $\dfrac{4\pi}{7}$ sont supplémentaires*

D'où : $S = -4P - 1$, et ainsi, $\boxed{S = -\frac{1}{2}}$ **0.75 pt**

Exercice 5 : étude des solutions d'équations (8 points)

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

   $f'(x)$ est donc du signe de $x-1$.

   On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

   $\boxed{f(1) = 2 \text{ est le minimum de la fonction } f \text{ sur }]0,+\infty[}$ **1.25 pt**

2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

   $f(x)\times f(x^p) - f(x^{p-1}) = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^p+\dfrac{1}{x^p}\right) - x^{p-1} - \dfrac{1}{x^{p-1}} = x^{p+1} + \dfrac{1}{x^{p-1}} + x^{p-1} + \dfrac{1}{x^{p+1}} - x^{p-1} - \dfrac{1}{x^{p-1}}.$

   $\boxed{\text{Ainsi, } \forall p \in \mathbb{N}^* \quad f(x)\times f(x^p) - f(x^{p-1}) = x^{p+1} + \dfrac{1}{x^{p+1}} = f(x^{p+1})}$ **0.75 pt**

   (b) Soit $\mathcal{H}_p$: « $f(x^p) \in \mathbb{N}$ »

   $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies.

   Supposons $\mathcal{H}_{p-1}$ et $\mathcal{H}_p$ vraies pour un entier $p \geq 1$.

   Alors $f(x)\times f(x^p)$ est un entier naturel (produit de deux entiers naturels)

   Donc $f(x^{p+1}) = f(x)\times f(x^p) - f(x^{p-1})$ est un entier relatif (différence de deux entiers naturels)

   Comme $f(x^{p+1}) \geq 0$, alors $f(x^{p+1}) \in \mathbb{N}$.

   $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

   $\boxed{\text{On a ainsi montré par une récurrence de pas double que } \forall p \in \mathbb{N} \quad f(x^p) \in \mathbb{N}}$ **1.25 pt**

3. (a) On résout l'équation (E_n) par équivalences :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = n &\iff \frac{x^2+1}{x} = n \\ &\iff x^2 + 1 = nx \qquad \text{car } x \neq 0 \\ &\iff x^2 - nx + 1 = 0 \end{aligned}$$

   Or cette équation du second degré a pour discriminant : $\Delta = n^2 - 4$

   Comme $n \geq 3$, $\Delta > 0$.

   Elle a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $\boxed{u_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2-4}}{2} \text{ et } v_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}}$

   $\boxed{\text{Il est clair que } v_n > 0}$ (somme de deux nombres strictement positifs)

   Il reste à justifier que $u_n > 0$.

   On a : $n^2 > n^2 - 4$.

   La fonction racine carrée étant strictement croissante, on déduit que $n > \sqrt{n^2-4}$

   Ainsi, $\boxed{u_n > 0}$ **1.75 pt**

   (b) <u>Méthode 1 :</u> $\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{2}{n+\sqrt{n^2-4}} \times \dfrac{n-\sqrt{n^2-4}}{n-\sqrt{n^2-4}} = \dfrac{2\left(n-\sqrt{n^2-4}\right)}{n^2-(n^2-4)} = \dfrac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}$ **0.5 pt**

   $\boxed{\text{Ainsi, } \dfrac{1}{v_n} = u_n}$

   <u>Méthode 2 :</u> on utilise le résultat de cours sur les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2+bx+c=0$

   Le produit x_1x_2 des deux solutions est égal à $\dfrac{c}{a}$.

   On obtient directement que $u_nv_n = 1$.

   (c) Comme $\sqrt{n^2-4} \geq 0$, alors $v_n \geq \dfrac{n}{2}$

   Et $\dfrac{n}{2} > 1$, d'où $\boxed{v_n > 1 \text{ puis } u_n = \dfrac{1}{v_n} < 1}$ **0.5 pt**

4. u_n est solution de l'équation (E_n), $f(u_n) = n$ et donc $f(u_n) \in \mathbb{N}$.
D'après la question 2, $f(u_n^p) \in \mathbb{N}$.

Notons $m = f(u_n^p)$.

Comme $u_n \in]0,1[$, alors $u_n^p \in]0,1[$.
D'après la question 1, $f(u_n^p) > 2$.

m **est donc un entier naturel tel que** $m \geq 3$.

u_n^p est solution de l'équation (E_m), donc $u_n^p = u_m$ (la relation $u_n^p = v_m$ est exclue car $u_n^p < 1$).

$\boxed{\text{Ainsi, } \left(\dfrac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^p = \dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}}$ **2 pts**

<u>Exemple :</u> prenons $n = 3$ et $p = 5$.

$u_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et après calculs, on trouve que : $u_3^5 = \dfrac{123-\sqrt{123^2-4}}{2} = u_{123}$

Exercice 6 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_k &= A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \big(b_{b+1} - b_k\big) \\
&= A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\
&= A_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(A_k - A_{k+1}\big) b_k \quad \textit{en regroupant les deux sommes sur les valeurs de } k \textit{ communes}
\end{aligned}$$

Or $A_0 = a_0$ et $A_k - A_{k-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k-1} a_i = a_k$

D'où : $A_n b_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A_k B_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier naturel } n, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_k}$$

2. On choisit ici $a_k = 2^k$ et $b_k = k$.

On a alors : $B_k = 1$ et $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

En appliquant la formule précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k2^k &= n\big(2^{n+1}-1\big) - \sum_{k=0}^{n-1} \big(2^{k+1}-1\big) \\
&= n\big(2^{n+1}-1\big) - 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= n\big(2^{n+1}-1\big) - 2\big(2^n - 1\big) + n \\
&= n2^{n+1} - n - 2^{n+1} + 2 + n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sum_{k=0}^{n} k2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2}$$
