Exercice 1 : minoration (4.5 pts)

1. Forme trigonométrique : $\boxed{a = \sqrt{2}e^{i\pi/4}}$

   En utilisant la formule de Moivre, on obtient : $\boxed{a^5 = 4\sqrt{2}e^{5i\pi/4}}$

   On en déduit : $\mathrm{Im}(a^5) = 4\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -4$. $\boxed{\text{Ainsi, } Q(a) = -4}$ **(1.25 pt)**

2. (a) D'après la formule du binôme, $z^5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(iy)^k x^{5-k}$

   pour k pair, les termes de la somme sont réels et pour k impair, les termes sont imaginaires purs

   $\boxed{\text{D'où } \mathrm{Im}(z^5) = 5yx^4 - 10y^3x^2 + y^5}$

   (b) $Q(z) = \dfrac{5yx^4 - 10y^3x^2 + y^5}{y^5} = 5\dfrac{x^4}{y^4} - 10\dfrac{x^2}{y^2} + 1$

   $\boxed{\text{Ainsi, } Q(z) = 5\,t^4 - 10\,t^2 + 1}$ **(1.5 pt)**

3. $Q(z) = 5\Big[t^4 - 2t^2 + \dfrac{1}{5}\Big] = 5\Big[(t^2-1)^2 - \dfrac{4}{5}\Big] = 5(t^2-1)^2 - 4$

   Comme $5(t^2-1)^2 \geq 0$, on obtient ainsi $\boxed{Q(z) \geq -4}$

   Il y a égalité si et seulement si $\dfrac{x^2}{y^2} = 1$

   si et seulement si $x^2 = y^2$

   si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$

   $\boxed{\text{Il y a égalité si et seulement si } \Big|\mathrm{Re}(z)\Big| = \Big|\mathrm{Im}(z)\Big|}$ **(1.75 pt)**

Exercice 2 : équations algébriques (10 pts)

1. (a) On résout cette équation par équivalences :

$$\begin{aligned} 2\,z^2 = z+1 &\iff 2\,z^2 - z - 1 = 0 \\ &\iff (z-1)(2z+1) = 0 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{L'équation admet deux solutions : 1 et } -\dfrac{1}{2}}$ **(0.75 pt)**

   (b) L'expression polynomiale $3z^2 - z^2 - z - 1$ s'annule pour $z = 1$.

   On peut donc factoriser par $(z-1)$ et on obtient : $3z^2 - z^2 - z - 1 = (z-1)(3z^2+2z+1)$.

   $3z^2 + 2z + 1$ a un discriminant égal à -12 et s'annule pour $z = \dfrac{-1-i\sqrt{2}}{3}$ et pour $z = \dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3}$.

   On a ainsi les équivalence suivantes :

$$\begin{aligned} 2\,z^3 = z^2 + z + 1 &\iff (z-1)(3z^2+2z+1) = 0 \\ &\iff z = 1 \text{ ou } z = \frac{-1-i\sqrt{2}}{3} \text{ ou } z = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{L'équation a ainsi trois solutions : 1, } \dfrac{-1-i\sqrt{2}}{3} \text{ et } \dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3}}$

   Les deux solutions non réelles de l'équation étant conjuguées, elles ont le même module.

$$\left|\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right| = \frac{|-1+i\sqrt{2}|}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

   $\boxed{\text{Il y a une solution de module 1 et deux solutions de module } \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ **(2 pts)**

2. Supposons $|z| > 1$ et montrons que z n'est pas solution de l'équation (E_p).

   D'après l'inégalité triangulaire, $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} z^k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} |z^k|$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}|z^k| = 1+|z|+|z|^2+\cdots+|z|^{p-1}$

Et comme $|z|>1$, alors pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$ $\quad |z|^k<|z|^p$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}|z|^k < \sum_{k=0}^{p-1}|z|^p = p|z|^p$.

Par conséquent, $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{p-1}z^k\right| < p|z|^p$

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}z^k$ ne peut donc pas être égal au nombre complexe pz^p vu que leurs modules sont différents.

Ce qui prouve que z n'est pas solution de l'équation (E_p).

$\boxed{\text{On a ainsi montré (par contraposition) que si } z \text{ est solution de l'équation } (E_p)\text{, alors } |z|\leq 1}$ **(2.5 pts)**

3. (a) Par hypothèse, on a : $pz^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}z^k$

Comme $z=e^{i\theta}$, alors $pz^p = pe^{ip\theta}$

$$\text{Et } \sum_{k=0}^{p-1}z^k = \frac{z^p-1}{z-1} \qquad \text{(car } z\neq 1)$$
$$= \frac{e^{ip\theta}-1}{e^{i\theta}-1}$$

Or $e^{ip\theta}-1 = e^{\frac{ip\theta}{2}}\left(e^{\frac{ip\theta}{2}}-e^{-\frac{ip\theta}{2}}\right) = e^{\frac{ip\theta}{2}}\times 2i\sin\left(\dfrac{p\theta}{2}\right)$

Et $e^{i\theta}-1 = e^{\frac{i\theta}{2}}\times 2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

On obtient alors : $pe^{ip\theta} = \dfrac{e^{\frac{ip\theta}{2}}\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Ce qui donne : $e^{ip\theta}\times\dfrac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{ip\theta}{2}}} = \dfrac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Comme $e^{ip\theta}\times\dfrac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{ip\theta}{2}}} = e^{i(p\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{p\theta}{2})} = e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}$, $\boxed{\text{alors } e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} = \dfrac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$ **(2.5 pts)**

(b) En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires de la relation précédente, on obtient :

$$\cos\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (1) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Or } \sin\left(\frac{p\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{(p+1)\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{d'après les formules d'addition}$$
$$= -\cos\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{en tenant compte de (2)}$$

La relation (1) donne alors : $\cos\left(\dfrac{(p+1)\theta}{2}\right) = -\dfrac{\cos\left(\frac{(p+1)\theta}{2}\right)}{p}$

Comme $\sin\left(\dfrac{(p+1)\theta}{2}\right)=0$, alors $\cos\left(\dfrac{(p+1)\theta}{2}\right)\neq 0$ $\quad$ (*puisque pour tout réel* t , $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$)

En simplifiant par $\cos\left(\dfrac{(p+1)\theta}{2}\right)$, on obtient $1=-\dfrac{1}{p}$, c'est-à-dire $p=-1$. **Contradiction.** **(2.25 pts)**

Exercice 3 : la méthode de Cardan

1. (a) L'équation $X^2 - zX - \dfrac{p}{3} = 0$ est une équation du second degré, **donc elle admet deux solutions complexes** u **et** v (éventuellement confondues).

Les liens entre racines et coefficients d'une équation du second degré nous disent alors que $u+v=z$ et $uv=-\dfrac{p}{3}$.

(b) On a : $u^3v^3 = (uv)^3 = \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3$, donc $\boxed{u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}}$

Ensuite : $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$,
Donc $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = z^3 + pz$.
Comme z est solution de (E), on a $z^3 + pz = -q$.

$\boxed{\text{Ainsi, } u^3 + v^3 = -q}$

(c) D'après le cours, u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation $X^2 - (u^3+v^3)X + u^3v^3 = 0$, c'est-à-dire de l'équation (E').

(d) On utilise le fait que $u^3 + v^3 = -q$, $uv = -\dfrac{p}{3}$, $j^3 = 1$, $j^4 = j$ et $j^5 = j^2$.

$$\begin{aligned}(ju + j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q &= u^3 + 3ju^2v + 3j^2uv^2 + v^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= 3uv(ju + j^2v) + p(ju + j^2v) \quad \text{car } u^3 + v^3 = -q \\ &= 0 \quad \text{car } 3uv = -p\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } ju + j^2v \text{ est une solution de l'équation } (E)}$

$$\begin{aligned}(j^2u + jv)^3 + p(j^2u + jv) + q &= u^3 + 3j^2u^2v + 3juv^2 + v^3 + p(j^2u + jv) + q \\ &= 3uv(j^2u + jv) + p(j^2u + jv) \quad \text{car } u^3 + v^3 = -q \\ &= 0 \quad \text{car } 3uv = -p\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } j^2u + jv \text{ est une solution de l'équation } (E)}$

2. Avec les notations de l'énoncé, $p = 6$ et $q = -2$. L'équation (E') est alors $X^2 - 2X - 8 = 0$
Le discriminant de (E') vaut : $\Delta = 36$.
L'équation (E') a donc deux racines réelles : 4 et -2.
$u = \sqrt[3]{4}$ et $v = -\sqrt[3]{2}$ sont respectivement des racines cubiques de 4 et -2 et vérifient : $uv = -\sqrt[3]{8} = -2 = -\dfrac{p}{3}$.

$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont alors les nombres : } \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2},\ j\sqrt[3]{4} - j^2\sqrt[3]{2} \text{ et } j^2\sqrt[3]{4} - j\sqrt[3]{2}}$
