

EXERCICE 1 :

1. D'après les théorèmes opératoires, la fonction h_n est dérivable sur $] -1, +\infty[$ (somme et quotient de fonctions usuelles dérivables sur $] -1, +\infty[$), et pour $x \in] -1, +\infty[$, on a :

$$h'_n(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}$$

Méthode 1 : les termes $\frac{n}{1+x}$ et $\frac{1}{(1+x)^2}$ sont strictement positifs, donc $f'(t) > 0$.

Méthode 2 :

Or $x > -1$, donc $n(1+x)+1 > 0$. Le numérateur et le dénominateur de $h'_n(x)$ sont strictement positifs, D'où $h'_n(x) > 0$.

La fonction h_n est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$

De plus, on remarque que $h_n(0) = 0$.

La stricte croissance de h_n permet alors de déduire que :

h_n est strictement négative sur $] -1, 0[$ et est strictement positive sur $]0, +\infty[$ **2 points**

2. La fonction f_n est dérivable sur $] -1, +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables.

Pour $x \in] -1, +\infty[$, on a :

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1} \left(n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right) = x^{n-1} h_n(x)$$

Le signe de x^{n-1} dépend de la parité de n . Plus précisément, on a : **(3 points)**

n pair :

x	-1	0	$+\infty$
$h_n(x)$	-	0	+
x^{n-1}	-	0	+
$f'_n(x)$	+	0	+
$f_n(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

n impair :

x	-1	0	$+\infty$
$h_n(x)$	-	0	+
x^{n-1}	+	0	+
$f'_n(x)$	-	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Pour les limites en -1 , on a :

- si n est pair, $\lim_{x \rightarrow -1} x^n = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -1} f_n(x) = -\infty$
- si n est impair, $\lim_{x \rightarrow -1} x^n = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -1} f_n(x) = +\infty$

La limite en $+\infty$ ne pose pas de problème : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

3. (a) La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]f_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[=]0, +\infty[$, intervalle qui contient 1.

L'équation $f_n(x) = 1$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ **1 point**

- (b) $f_n(1) = \ln(2) < 1$.

$f_n(u_n) > f_n(1)$, et f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que $u_n > 1$ **0.5 point**

- (c) $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} \ln(1+u_n) = u_n \times u_n^n \ln(1+u_n) = u_n \underbrace{f_n(u_n)}_{=1} = u_n$.

Par conséquent, $f_{n+1}(u_n) > 1$ **1.25 point**

$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$, et f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que $u_n > u_{n+1}$ **0.75 point**

(d) D'après la formule du binôme, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

Les deux premiers termes de cette somme sont 1 et $\binom{n}{1} \times \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1$.

D'où

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

Les termes de la somme $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$ étant positifs, on en déduit que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ **1.5 point**

$$f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Comme $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ et $\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \geq \ln(2)$, alors $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 2 \ln(2)$.

Or $2 \ln(2) > 1$. Par conséquent, $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$ **0.75 point**

(e) $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > f_n(u_n)$ et f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$: par conséquent, $1 + \frac{1}{n} > u_n$.

On a alors : $1 < u_n < 1 + \frac{1}{n}$. **1 point**

Comme u_n est encadré par deux termes qui tendent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

EXERCICE 2 : ÉTUDE DE FONCTIONS (11 PTS)

1. (a) On compare le numérateur et le dénominateur : $1 + x - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$.

On a donc : $0 \leq 2\sqrt{x} \leq 1 + x$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f(x) \leq 1$ **(1 pt)**

(b) Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{x+1} = \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = f(x)$$

Ainsi, $\forall x \in]0, +\infty[\quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ **(0.75 pt)**

(c) D'après les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = \frac{\frac{1+x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{(1+x) - 2x}{\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} \quad \textbf{(1.25 pt)}$$

Dérivabilité en 0 : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)}$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}(x+1) = 0^+$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$.

f n'est donc pas dérivable en 0. **(0.75 pt)**

(d) **Barème : 1.25 pt**

$f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	—
f	1			
	0	$\nearrow$	$\searrow$	0

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)} = \frac{2}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{x} + 1\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = +\infty, \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

Autre justification possible : d'après la question b, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{array} \right\} \text{ par composition des limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

2. (a) F est la composée de arcsin et f .

f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et arcsin est strictement croissante, donc F est strictement croissante sur $[0, 1]$.

f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et arcsin est strictement croissante, donc F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. **(0.75 pt)**

(b) La fonction arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, 1]$.

On exclut du domaine d'application des théorèmes opératoires les valeurs de x pour lesquels $f(x) = 1$.

Or la fonction f prend la valeur 1 seulement au point 1.

On peut donc appliquer les théorèmes opératoires sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. (0.75 pt)

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x}{(1+x)^2}}} \times f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x)^2 - 4x}{(1+x)^2}}} \times f'(x) = \frac{\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} \times \frac{1-x}{\sqrt{x(1+x)^2}}$$

Or $\sqrt{(1+x)^2} = 1+x$ car $1+x \geq 0$,

Et $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

Ainsi, $F'(x) = \frac{1-x}{|x-1|\sqrt{x(1+x)}}$

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ \frac{-1}{\sqrt{x(1+x)}} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases} \quad \textbf{(1.75 pt)}$$

3. (a) On a : $\tan(\theta) = \sqrt{x}$

$$\text{D'où : } \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \frac{2\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1+\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sin(2\theta) \quad \textbf{(1 pt)}$$

(b) **Barème : 1.75 pt**

On en déduit que $F(x) = \arcsin(\sin(2\theta))$.

Attention, la relation $\arcsin(\sin(t)) = t$ n'est valable que pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

On distingue deux cas :

• Si $x \leq 1$: alors $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, donc $\arctan(0) \leq \arctan(\sqrt{x}) \leq \arctan(1)$ par croissance de la fonction arctan.

Puis $0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$.

D'où $F(x) = 2\theta = 2\arctan(\sqrt{x})$

• Si $x > 1$: alors $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

donc $\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$, puis $0 < \pi - 2\theta < \frac{\pi}{2}$

D'où $F(x) = \arcsin(\sin(\pi - 2\theta)) = \pi - 2\theta = \pi - 2\arctan(\sqrt{x})$

Autre justification possible :

Si $x > 1$, alors $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$ en utilisant le résultat de la question 1b.

Comme $\frac{1}{x} \in]0, 1[$, alors $F\left(\frac{1}{x}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x})\right)$

EXERCICE 3 :

1. D'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, f est dérivable sur I et

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{4-4x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}}$$

Comme $4-4x^2 > 1-4x^2$, alors $\sqrt{4-4x^2} > \sqrt{1-4x^2}$ (la fonction racine est strictement croissante)

Ainsi, $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$.

f est donc strictement croissante (1.25 pt)

2. f est strictement croissante et continue sur l'intervalle I , donc réalise une bijection de I vers l'intervalle

$$J = f(I), \text{ avec } J = \left] \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) \right[= \left] -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[.$$

De plus, f est dérivable et f' ne s'annule pas, donc f^{-1} est dérivable sur J (1 pt)

3. On utilise les formules d'addition et les relations $\sin(\arcsin(t)) = t$ et $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2}$ pour obtenir $\sin(f(x))$ et $\cos(f(x))$:

$$\bullet \sin(f(x)) = 2x\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-4x^2}$$

$$\bullet \cos(f(x)) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} + 2x^2.$$

$$\bullet \sin^2(f(x)) + 4x^2 \cos(f(x)) = 4x^2(1-x^2) + x^2(1-4x^2) - 4x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} + 4x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} + 8x^4 \\ = 4x^2 - 4x^4 + x^2 - 4x^4 + 8x^4$$

$$\sin^2(f(x)) + 4x^2 \cos(f(x)) = 5x^2 \quad (1.5 \text{ pt})$$

4. Soit $y \in J$. Notons $x = f^{-1}(y)$.

On a, d'après la question précédente : $\sin^2(y) + 4x^2 \cos(y) = 5x^2$,

donc $\sin^2(y) = x^2(5 - 4\cos(y))$.

Comme $4\cos(y) \leq 4$, alors $5 - 4\cos(y) > 0$.

On obtient donc $x^2 = \frac{\sin^2(y)}{5 - 4\cos(y)}$ (0.75 pt)

Ce qui donne $x = \frac{\sin(y)}{\sqrt{5 - 4\cos(y)}}$ ou $x = -\frac{\sin(y)}{\sqrt{5 - 4\cos(y)}}$

Comme f est croissante et $f(0) = 0$, alors $y = f(x)$ a le même signe que x .

De plus, $y \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$, donc $\sin(y)$ a le même signe que y , et donc a le même signe que x .

On en déduit que $x = \frac{\sin(y)}{\sqrt{5 - 4\cos(y)}}$. (1 pt)

$$\text{Ainsi, } \forall y \in J \quad f^{-1}(y) = \frac{\sin(y)}{\sqrt{5 - 4\cos(y)}}$$

EXERCICE 4 : INÉGALITÉ DE HÖLDER (6.5 pts)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque les fonctions puissances sont dérivables), et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(t) = -\frac{a^p}{pq}t^{-\frac{1}{q}-1} + \frac{b^q}{pq}t^{\frac{1}{p}-1}$$

$$\text{Or } \frac{1}{p} - 1 = -\frac{1}{q},$$

$$\text{D'où } f'(t) = -\frac{a^p}{pq}t^{-\frac{1}{q}-1} + \frac{b^q}{pq}t^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{pq}t^{-\frac{1}{q}-1} \left[-a^p + b^q t \right] \quad 1.25 \text{ point}$$

Comme $\frac{1}{pq}t^{-\frac{1}{q}-1}$ est strictement positif, $f'(t)$ est du signe de $-a^p + b^q t$.

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(t) = 0 \iff b^q t = a^p$

$$\iff t = \frac{a^p}{b^q}$$

Et : $f'(t) > 0 \iff t > \frac{a^p}{b^q}$

La fonction f est par conséquent décroissante sur $\left]0, \frac{a^p}{b^q}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{a^p}{b^q}, +\infty\right[$: elle admet donc un minimum m au point $\frac{a^p}{b^q}$. **1 point**

$$m = f\left(\frac{a^p}{b^q}\right) = \frac{a^p}{q} \frac{a^{-p/q}}{b^{-1}} + \frac{b^q}{q} \frac{a}{b^{q/p}} = \frac{1}{p} a^{p(1-\frac{1}{q})} b + \frac{1}{q} b^{q(1-\frac{1}{p})} a$$

On rappelle que $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, d'où $a^{p(1-\frac{1}{q})} = a^1 = a$.

De même, $b^{q(1-\frac{1}{p})} = b$.

On obtient alors : $m = ab\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = ab$

Le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$ vaut ab **1.25 point**

2. La question précédente permet d'affirmer que :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad ab \leq \frac{a^p}{p} t^{-\frac{1}{q}} + \frac{b^q}{q} t^{\frac{1}{p}}$$

De plus, on remarque que l'inégalité reste vraie si a ou b est nul.

On applique cette inégalité pour $a = |x_k|$ et $b = |y_k|$ (où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) pour obtenir après sommation terme à terme :

$$\sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{|x_k|^p}{p} t^{-\frac{1}{q}} + \frac{|y_k|^q}{q} t^{\frac{1}{p}} \right)$$

On a également d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| |y_k|$$

Ce qui permet de déduire l'inégalité attendue :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \frac{t^{-\frac{1}{q}}}{p} \sum_{k=1}^n |x_k|^p + \frac{t^{\frac{1}{p}}}{q} \sum_{k=1}^n |y_k|^q \quad \mathbf{1.5 \text{ point}}$$

3. Dans l'expression de droite de l'inégalité précédente, on reconnaît $f(t)$ avec $a = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $b = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Le terme $\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right|$ est inférieur à $f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, donc il est inférieur au minimum $m = f\left(\frac{a^p}{b^q}\right)$:

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \mathbf{1.5 \text{ point}}$$
